



# Contributions au traitement radar haute résolution : détection de cibles étendues et optimisation de formes d'onde

Timothee Rouffet

## ► To cite this version:

Timothee Rouffet. Contributions au traitement radar haute résolution : détection de cibles étendues et optimisation de formes d'onde. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Bordeaux, 2015. Français. NNT : 2015BORD0295 . tel-01275873

**HAL Id: tel-01275873**

**<https://theses.hal.science/tel-01275873>**

Submitted on 18 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

*présentée pour obtenir le titre de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Spécialité : Automatique, Productique, Signal et Image, Ingénierie Cognitive

par Timothée ROUFFET

### **Contributions au traitement radar haute résolution : détection de cibles étendues et optimisation de formes d'onde**

Soutenue le 7 décembre 2015 devant le jury composé de :

M. FABRIE Pierre	Professeur à l'Université de Bordeaux	Président
M. GINOLHAC Guillaume	Professeur à Polytech Annecy-Chambéry	Rapporteur
M. LARZABAL Pascal	Professeur à l'IUT de Cachan	Rapporteur
M. OVARLEZ Jean-Philippe	Maître de Recherche HDR à l'ONERA	
M. ENDERLI Cyrille	Responsable du service Intelligence Artificielle, Élan-court	Référent scientifique Thales
M. VALLET Pascal	Maître de Conférences à l'ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux INP, Talence	Co-encadrant de thèse
M. GRIVEL Eric	Professeur à l'ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux INP, Talence	Directeur de thèse

Préparée à Thales Systèmes Aéroportés  
25, avenue Gustave Eiffel - 33608 Pessac Cedex  
et au Laboratoire IMS, UMR CNRS 5218, Université de Bordeaux, Bordeaux INP  
351, avenue de la Libération - 33405 Talence Cedex



# Remerciements

A l'issue de ces trois années de thèse, voici venu le moment d'écrire la note finale en remerciant les différents acteurs qui m'ont permis de mener à bien ma thèse de Doctorat.

Je voudrais tout d'abord remercier Guillaume GINOLHAC et Pascal LARZABAL qui ont pris le temps de relire ma thèse et de la rapporter. Merci également à Jean-Philippe OVARLEZ d'avoir participé au jury et à Pierre FABRIE de l'avoir présidé.

Je voudrais remercier en particulier mon directeur de thèse Eric GRIVEL pour sa confiance et son encadrement qui font partie, sans aucun doute, de ma réussite. Je remercie également mon co-encadrant de thèse Pascal VALLET pour les nombreux échanges permettant d'avancer avec rigueur.

Je remercie Richard MONTIGNY qui m'a permis d'effectuer ma thèse CIFRE au sein de Thales Systèmes Aéroportés ainsi que Cyrille ENDERLI pour son encadrement scientifique, ses nombreux conseils, en particulier concernant le traitement du signal appliqué au Radar. Merci à Bernard JOSEPH qui a grandement participé à ma compréhension de la chaîne de traitement radar.

Je remercie mes différents collègues à Thales avec qui j'ai pu non seulement échanger sur le radar mais également avec qui j'ai passé de bons moments : Adrien, Alexandre, Benoit, Clément, Gilles, Jérémie, Julien, Lionel, Mickaël, Philippe, Pierre-Albert, Sébastien, Sylvain, Vincent M. et Vincent C. (j'espère n'oublier personne!).

Je remercie les différentes personnes du laboratoire IMS pour tous les échanges que l'on a pu avoir : Ahmed, Andrei, Audrey, Céline, Christian, Emilie, Guillaume F. et Guillaume Z., Jacques, Jean-François, Jean-Pierre, Jessica, Léo, Lionel, Marc, Mouna, Olivier, Romain, Roxana, Salma, Simone, Valérie, Yannick. (là aussi, j'espère n'oublier personne!).

Pour leur précieux soutien à chaque instant, je remercie ma famille ainsi que mes amis : les Begues, les Chorro, les Guillermo, les Lisman, la Malali, les Payet, les Renault, les Roche, les Sanctussy, les Tag, et beaucoup d'autres encore...

Enfin, je termine en remerciant ma femme, Sam, qui m'a accompagné, soutenu, encouragé, épaulé et qui a toujours cru en moi.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Glossaire</b>	<b>xiii</b>
<b>Notations</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur le radar</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Principe de fonctionnement d'un radar . . . . .	6
1.3 Modèles des signaux . . . . .	8
1.3.1 Distance radar-cible . . . . .	8
1.3.2 Expression générale du signal reçu : le modèle à $K$ points brillants . . . . .	9
1.4 Modélisation des coefficients d'atténuation . . . . .	13
1.4.1 Phénomène physique . . . . .	13
1.4.2 Modèles statistiques . . . . .	14
1.5 Modélisation du fouillis . . . . .	15
1.6 Conclusions . . . . .	19
<b>2 Détection d'une cible étendue : état de l'art et contribution</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Rappels sur la détection d'une cible composée d'un seul point brillant . . . . .	22
2.2.1 Détection en présence de bruit thermique . . . . .	22
2.2.1.1 Traitement de détection . . . . .	23
2.2.1.2 Performances de détection . . . . .	24
2.2.1.2.1 Probabilité de fausse alarme (PFA) . . . . .	24
2.2.1.2.2 Probabilité de détection (PD) pour le modèle de Swerling 0 . . . . .	25
2.2.1.2.3 PD pour le modèle de Swerling I . . . . .	26
2.2.2 Détection en présence de fouillis gaussien . . . . .	27
2.3 Détection d'une cible à multiples points brillants . . . . .	29
2.3.1 Etat de l'art sur les détecteurs d'une cible étendue . . . . .	30
2.3.1.1 Le détecteur « quadratique » . . . . .	32

2.3.1.2	Le détecteur « K/Q » . . . . .	35
2.3.1.3	Le détecteur dit « optimal » . . . . .	36
2.3.1.4	Le détecteur « SSD » . . . . .	38
2.3.2	Contribution : étude d'un GLRT pour la détection d'une cible composée de $K$ points brillants non nécessairement consécutifs . . . . .	39
2.3.2.1	Traitement de détection . . . . .	39
2.3.2.2	Performances de détection . . . . .	41
2.3.2.2.1	Expression analytique de la PFA asymptotique . . . . .	41
2.3.2.2.2	Expression analytique de la PD asymptotique . . . . .	45
2.3.2.2.3	Expression analytique de la probabilité de détection et de localisation (PDL) asymptotique . . . . .	47
2.3.2.3	Simulations : évaluation des performances du détecteur proposé . . . . .	50
2.3.2.3.1	Résultats de simulation pour la PFA . . . . .	50
2.3.2.3.2	Résultats de simulation pour la PDL . . . . .	54
2.3.3	Etude comparative par simulations . . . . .	56
2.4	Bilan sur la détection d'une cible étendue . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Optimisation de formes d'onde</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	62
3.2	Etat de l'art sur l'optimisation de formes d'onde . . . . .	62
3.3	Contributions : optimisation multi-objectifs d'une forme d'onde avec deux codes de phases en présence de fouillis gaussien coloré . . . . .	65
3.3.1	Expression du signal émis et du signal reçu . . . . .	66
3.3.2	Optimisation dans un cas mono-résolution . . . . .	67
3.3.2.1	Traitements . . . . .	67
3.3.2.2	Analyse du signal reçu pour un fouillis modélisé par un processus AR( $p$ ) . . . . .	70
3.3.2.3	Sélection des codes intra et inter-impulsion . . . . .	76
3.3.3	Optimisation dans un cas bi-résolution . . . . .	79
3.3.3.1	Expressions du signal reçu après le traitement basse résolution . . . . .	81
3.3.3.2	Analyse du signal reçu pour un fouillis modélisé par un processus AR(1) . . . . .	83
3.3.4	Résultats de simulation . . . . .	86
3.3.5	Bilan sur les deux approches proposées . . . . .	93
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>95</b>
	<b>Annexes</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Rappels sur les densités de probabilité</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 2</b>	<b>105</b>
B.1	Propriété asymptotique de la fonction d'autocorrélation d'une impulsion MLF . . . . .	105
B.2	Démonstration de la propriété 1 . . . . .	107

B.3	Démonstration du lemme 1 . . . . .	113
B.4	Démonstration du lemme 2 . . . . .	115
<b>C</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 3</b>	<b>117</b>
C.1	Expression de l'inverse de la matrice de covariance pour un processus AR(p) . . .	117
C.2	Propriété de la fonction d'autocorrélation $r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}$ . . . . .	119
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>
	<b>Abstract</b>	<b>127</b>
	<b>Résumé</b>	<b>130</b>





# Table des figures

1.1	Azimut $\phi$ et élévation $\theta$ de la cible par rapport au radar . . . . .	6
1.2	Radars à balayage mécanique et à balayage électronique . . . . .	7
1.3	Principe de fonctionnement d'un radar en quatre étapes . . . . .	7
1.4	Chaîne de traitement radar à l'émission et à la réception . . . . .	8
1.5	Cible modélisée par $K$ réflecteurs élémentaires . . . . .	10
1.6	Exemples de mécanismes de réflexion de l'onde électromagnétique sur une cible .	14
1.7	Modélisation du fouillis . . . . .	16
1.8	Fouillis hétérogène : exemple du fouillis de mer modélisé par une loi K . . . . .	17
1.9	Exemples de spectres Doppler de fouillis . . . . .	18
2.1	PD en fonction du RSB pour le modèle de fluctuation Swerling 0 dans le cas de la détection d'une cible ponctuelle . . . . .	26
2.2	PD en fonction du RSB pour le modèle de fluctuation Swerling I dans le cas de la détection d'une cible ponctuelle . . . . .	27
2.3	Exemple de scénario avec une seule cible constituée de $K$ points brillants répartis sur $Q$ cases distances . . . . .	31
2.4	PFA et PD du détecteur quadratique, $Q = 15, K = Q$ . . . . .	34
2.5	Détecteur quadratique pour différentes configurations de cible . . . . .	34
2.6	PD du détecteur quadratique, $Q = 15, K = 2$ . . . . .	35
2.7	PFA et PD du détecteur $K/Q$ , $Q = 15, K = 2$ . . . . .	36
2.8	PFA et PD du détecteur optimal, $Q = 15, K = 2$ . . . . .	37
2.9	PFA et PD du détecteur SSD, $Q = 15, K = 2$ . . . . .	38
2.10	PFA théorique et empirique du détecteur analysé, $Q = 15, K = 2$ . . . . .	51
2.11	PFA théorique et empirique du détecteur analysé, $Q = 15, K = 6$ . . . . .	51
2.12	PFA théorique et empirique du détecteur analysé, $Q = 15, K = 9$ . . . . .	51
2.13	PFA théorique et empirique du détecteur analysé, $Q = 10, K = 2$ . . . . .	52
2.14	PFA théorique et empirique du détecteur analysé, $Q = 15, K = 2$ . . . . .	52
2.15	PFA théorique et empirique du détecteur analysé, $Q = 20, K = 2$ . . . . .	52
2.16	PFA théorique et empirique du détecteur analysé pour un signal émis de bande passante $B = 150 MHz$ et de durée $T = 30 \mu s$ , $Q = 15, K = 2$ . . . . .	53
2.17	PFA théorique et empirique du détecteur analysé pour $10^8$ simulations de Monte Carlo . . . . .	53
2.18	PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du seuil, $Q = 15, K = 2$ . . . . .	54

2.19 PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du seuil, $Q = 15, K = 6$ . . . . .	54
2.20 PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du seuil, $Q = 20, K = 2$ . . . . .	55
2.21 PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour $Q = 15, K = 2$ . . . . .	55
2.22 PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour $Q = 15, K = 5$ . . . . .	55
2.23 PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour $Q = 20, K = 2$ . . . . .	56
2.24 PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour $K = 5, Q = 15$ et $B = 10 MHz$ . . . . .	56
2.25 Comparaison des PD en fonction du RSB pour $Q = 15, K = 2$ . . . . .	57
2.26 Comparaison des PD en fonction du RSB pour $Q = 15, K = 6$ . . . . .	57
2.27 Comparaison des PD en fonction du RSB pour $Q = 15, K = 13$ . . . . .	57
2.28 Comparaison des PD en fonction du RSB pour $Q = 10, K = 2$ . . . . .	58
2.29 Comparaison des PD en fonction du RSB pour $Q = 15, K = 2$ . . . . .	58
2.30 Comparaison des PD en fonction du RSB pour $Q = 20, K = 2$ . . . . .	58
2.31 Comparaison des PD en fonction du RSB pour une cible avec 4 réflecteurs, $K = 4$ . . . . .	59
2.32 Comparaison des PD en fonction du RSB pour une cible avec 4 réflecteurs, $K$ sur-estimé . . . . .	59
2.33 Comparaison des PD en fonction du RSB pour une cible avec 4 réflecteurs, $K$ sous-estimé . . . . .	59
3.1 Schéma du principe du système bi-résolution . . . . .	62
3.2 Familles et sous-familles de formes d'onde . . . . .	64
3.3 Forme d'onde avec un code de phase inter-impulsion $\mathbf{c}$ et un code de phase intra- impulsion $\mathbf{d}$ . . . . .	66
3.4 Traitements à la réception . . . . .	67
3.5 Signal reçu après filtrage passe-bas et échantillonnage à $T_c$ . . . . .	68
3.6 Exemple de représentation de $\tilde{r}_1$ . . . . .	74
3.7 Positions $\tilde{\ell}_0$ de la cible pour lesquelles $\tilde{r}_2(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}) = 0$ . . . . .	75
3.8 Principe de l'augmentation de la distance ambiguë avec une modulation de phase inter-impulsion . . . . .	76
3.9 Exemple de représentation de front de Pareto en deux dimensions . . . . .	78
3.10 Schéma de principe de la méthode de sélection du code intra-impulsion . . . . .	79
3.11 Principe du système bi-résolution . . . . .	80
3.12 Chaînes de traitement basse et haute résolution . . . . .	80
3.13 Valeurs des paramètres AR considérés dans le triangle de stabilité discrétisé . . . .	87
3.14 $\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1), $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-4}$ . . . . .	88

3.15	$\tilde{r}$ après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1), $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-4}$ . . . . .	88
3.16	$\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1), $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-2}$ . . . . .	88
3.17	$\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1), $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-1}$ . . . . .	89
3.18	$\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2), $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-4}$ . . . .	90
3.19	$\tilde{r}$ après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2), $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-4}$ . . . . .	90
3.20	$\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2), $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-2}$ . . . . .	90
3.21	$\tilde{r}$ après traitement pour les 4 codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2), $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-1}$ . . . . .	91
3.22	Ensemble des 100 jeux de paramètres AR considérés dans le plan complexe . . .	91
3.23	$\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(5) . . . . .	92
3.24	$\tilde{r}$ après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(5) . . . . .	92
3.25	$\tilde{r}$ après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(7) . . . . .	93
3.26	$\tilde{r}$ après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(7) . . . . .	93



# Glossaire

AIC	<i>Akaike information criterion</i> , Critère d'information d'Akaike
AR	Autorégressif
DSP	Densité spectrale de puissance
GLRT	<i>Generalized likelihood ratio test</i> , test du rapport de vraisemblance généralisé
i.i.d.	Indépendant et identiquement distribué
ISLR	<i>Integrated sidelobe ratio</i> , rapport entre l'énergie contenue dans les lobes secondaires et l'énergie du lobe principal
MLF	Modulée linéairement en fréquence
PD	Probabilité de détection
PDL	Probabilité de détection et de localisation
PFA	Probabilité de fausse alarme
PSLR	<i>Peak-to-sidelobe-ratio</i> , rapport entre la hauteur du lobe secondaire le plus élevé et la hauteur du lobe principal
RIF	Réponse impulsionnelle finie
RSB	Rapport signal-à-bruit
SER	Surface équivalente radar
SSD	<i>Spatial scattering density</i> , densité spatiale des réflecteurs
SF	Sauts de fréquence
SIRV	<i>Spherically invariant random variable</i> , variable aléatoire sphériquement invariant
TCL	Théorème central limite



# Notations

Les scalaires sont en italique, les vecteurs sont en minuscule et en gras et les matrices sont en majuscule et en gras.

## Chapitre 1

$\mathbb{E}[]$	Espérance mathématique
$\lambda_c$	Longueur d'onde associée à la fréquence porteuse $f_c$
$\Re$	Partie réelle
$\sigma_{SER}$	Surface équivalent radar
$\sigma^2$	Variance du bruit thermique
$\tau(t)$	Temps de trajet aller-retour de l'onde émise lorsqu'elle est reçue à l'instant $t$
$\tau_0$	Temps proportionnel à la distance radar-cible ponctuelle à l'instant où le radar émet un signal, c'est-à-dire $t = 0$
$\tau_0^{(k)}$	Temps proportionnel à la distance radar-réflecteur $k$ à l'instant où le radar émet un signal, c'est-à-dire $t = 0$
$\tau^{(k)}(t)$	Temps de trajet aller-retour de l'onde pour atteindre le $k^{ième}$ réflecteur puis revenir au radar à l'instant $t$
$a_k$	Coefficient d'atténuation dû à la propagation du signal émis rétrodiffusé par le $k^{ième}$ réflecteur en direction du radar
$b(lT_s)$	Échantillon dû au bruit thermique à l'instant $lT_s$
$u(lT_s)$	Échantillon dû au fouillis ( <i>clutter</i> en anglais) à l'instant $lT_s$
$B$	Bande passante du signal émis $s$
$c$	Célérité des ondes lumineuses
$\mathbf{u}$	Vecteur contenant les échantillons du fouillis
$\text{diag}(a_1, \dots, a_L)$	Matrice diagonale contenant les éléments $a_1, \dots, a_L$
$f_c$	Fréquence porteuse
$G$	Gain d'antenne
$G_{rec}$	Gain d'antenne à la réception
$K$	Nombre de réflecteurs élémentaires
$L$	Nombre d'échantillons du signal reçu
$L_{pertes}$	Facteur d'atténuation dû aux pertes hyperfréquences et atmosphériques
$P_c$	Puissance crête émise par le radar
$R_0$	Distance radar-cible ponctuelle à l'instant $t = 0$



$R_0^{(k)}$	Distance radar-réfecteur $k$ à l'instant $t = 0$
$s$	Signal émis
$T$	Durée du signal émis $s$
$T_s$	Période d'échantillonnage
$T_r$	Période de récurrence d'un train d'impulsions
$v_{\text{radar}}$	Vitesse absolue du radar
$v_{\text{cible}}$	Vitesse absolue de la cible
$v_{rr}$	Vitesse radiale de la cible relativement à la vitesse du radar
$v_{rr}^{(k)}$	Vitesse radiale du $k^{\text{ième}}$ réflecteur relativement à la vitesse du radar
$\mathbf{x}^H$	Transposée conjuguée du vecteur $\mathbf{x}$
$\mathbf{X}_{\tau_0, f_0}$	Matrice de taille $K \times L$ contenant les $K$ vecteurs colonnes de taille $L$ du signal émis retardés de $\tau_0^{(1)}, \dots, \tau_0^{(K)}$ et décalés de la fréquence Doppler $f_0$
$y$	Signal reçu en bande de base
$\tilde{y}$	Signal reçu à la fréquence porteuse $f_c$

## Chapitre 2

$\ \mathbf{x}\ $	Norme 2 du vecteur $\mathbf{x}$
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	Convergence en distribution
$\epsilon$	Seuil de détection
$\eta$	Rapport signal-à-bruit
$\gamma^2$	Variance du coefficient d'atténuation $\alpha$ lorsque $\alpha$ est une variable aléatoire gaussienne circulaire
$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\alpha, \sigma^2)$	Loi normale complexe de moyenne $\alpha$ et de variance $\sigma^2$
$\mathcal{N}_{\mathbb{C}^L}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{M})$	Loi normale complexe multivariée de dimension $L$ , de moyenne $\boldsymbol{\alpha}$ et de matrice de covariance $\mathbf{M}$
$\Omega_K$	Ensemble des combinaisons de $K$ éléments distincts dans l'ensemble $\{1, \dots, Q\}$
$\Omega_Q$	Ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, Q\}$
$\text{card}(\Omega_Q)$	Cardinal de l'ensemble $\Omega_Q$
$H_0$	Hypothèse où le signal reçu contient uniquement du bruit
$H_1$	Hypothèse où le signal reçu contient le signal d'intérêt et du bruit
$i_k$	Indice relatif à la position du $k^{\text{ième}}$ réflecteur élémentaire, $i_k \in \llbracket 1; Q \rrbracket$
$\mathbf{I}_L$	Matrice identité de taille $L \times L$
$\boldsymbol{\Gamma}$	Matrice de covariance du fouillis
$F_{\chi^2, 2Q}$	Fonction de répartition de la loi du $\chi^2$ à $2Q$ degrés de liberté
$F_{\chi_{nc}^2, 2Q}$	Fonction de répartition de la loi du $\chi^2$ non-centrée à $2Q$ degrés de liberté
$\mathbb{P}_D$	Probabilité de détection
$\mathbb{P}_{DL}$	Probabilité de détection et de localisation
$\mathbb{P}_{FA}$	Probabilité de fausse alarme
$Q$	Nombre de cases distance sur lesquelles s'étendent les $K$ réflecteurs élémentaires

$r_{ss}$	Fonction d'autocorrélation du signal $s$
$S_N$	Statistique du test tenant compte de la localisation des réflecteurs

### Chapitre 3

$\Delta_f$	Saut de fréquence d'impulsion à impulsion
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\chi_s$	Fonction d'ambiguïté du signal $s$
$\mathbf{c}$	Code de phase inter-impulsion
$\mathbf{d}$	Code de phase intra-impulsion
$\mathbf{J}$	Matrice de décalage de taille $M\tilde{L} \times M\tilde{L}$ contenant des uns sur la première sous-diagonale et des zéros partout ailleurs
$\tilde{\mathbf{J}}$	Matrice de décalage de taille $MN\tilde{L} \times MN\tilde{L}$
$\tilde{L}$	Nombre d'échantillons dans une récurrence
$M$	Longueur du code inter-impulsion $\mathbf{c}$
$N$	Longueur du code intra-impulsion $\mathbf{d}$
$r_{amb}$	Distance ambiguë
$r_{\mathbf{d}}$	Fonction d'autocorrélation du code de phase $\mathbf{d}$
$\tilde{r}$	Signal reçu sans bruit après traitement haute résolution
$r$	Signal reçu sans bruit après traitement basse résolution
$T_c$	Durée d'un « chip »
$v_{amb}$	Vitesse ambiguë
$\mathbf{z}$	Vecteur contenant les échantillons du signal reçu après traitement basse résolution
$\tilde{\mathbf{z}}$	Vecteur contenant les échantillons du signal reçu après traitement haute résolution



# Introduction

---

C'EST lors de la seconde guerre mondiale que l'utilisation de radars aéroportés a commencé à se généraliser. Le rôle du radar était de détecter une cible et de déterminer la distance radar-cible. Le radar pouvait atteindre une portée de l'ordre de  $5\text{ km}$  pour une résolution en distance supérieure à  $100\text{ m}$ . Ainsi, lorsqu'une cible était détectée, elle apparaissait sur l'écran de visualisation comme un unique point brillant et ne pouvait donc pas être identifiée. Aujourd'hui, les radars aéroportés sont capables d'atteindre une résolution en distance de l'ordre du mètre. Dans ce cas, une cible comme un avion est caractérisée par un ensemble de réflecteurs élémentaires. Les positions et amplitudes de ces derniers sont caractéristiques de la cible et permettent de l'identifier. On parle de son « profil distance ».

L'établissement d'un profil distance en haute résolution d'une cible constitue l'un des enjeux industriels actuels et les problématiques à traiter sont multiples : il s'agit de concevoir un traitement de détection qui tire profit de *l'a priori* que les réflecteurs proviennent d'une même cible pour améliorer les performances de détection. De plus, il faut prendre en compte que les positions des réflecteurs sont inconnues. Enfin, les contraintes sont nombreuses lorsqu'il s'agit de la mise en œuvre des algorithmes de détection : elles sont liées au temps d'illumination, au temps de rafraîchissement et aux différentes fonctions que doit mener un radar.

Au vu de ces problématiques, le travail de cette thèse se décompose selon deux axes d'étude : l'un concerne la détection d'une cible à plusieurs réflecteurs élémentaires, l'autre la conception de formes d'onde multi-résolutions. Pour traiter ces deux aspects complémentaires, ce mémoire de thèse s'organise de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons le principe de fonctionnement du radar puis nous donnons une expression du signal reçu lorsque la cible est modélisée par  $K$  réflecteurs élémentaires répartis sur  $Q$  cases distance. Sachant que le signal reçu est une version atténuée et retardée du signal émis auquel s'ajoute un ensemble de perturbations telles que le bruit thermique ou le fouillis de sol ou de mer, nous introduisons ensuite la modélisation statistique utilisée pour les coefficients d'atténuation et les perturbations.

Dans le chapitre deux, après un rappel sur la détection d'une cible ponctuelle dans le cas où le signal est perturbé par un bruit gaussien, nous traitons la détection d'une cible dite « étendue », c'est-à-dire caractérisée par  $K$  réflecteurs élémentaires prépondérants répartis de manière non

nécessairement consécutive sur  $Q$  cases distance. Il s'agit alors de déterminer un test de détection qui prend en compte la localisation des réflecteurs élémentaires afin d'obtenir le profil distance puis de caractériser les performances de ce détecteur en termes de probabilité de fausse alarme (PFA) et de probabilité de détection (PD).

La plupart des détecteurs référencés dans la littérature sont développés à partir du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT pour *generalized likelihood ratio test*) sous différentes hypothèses sur les positions des réflecteurs et le nombre  $K$  de réflecteurs [VAN71, GER97, SHN98]. Selon les méthodes proposées, les réflecteurs ne sont pas localisables et/ou les performances de détection n'ont pas d'expressions analytiques connues.

Aussi, nous proposons d'étudier un test de détection fondé sur le GLRT intégrant la localisation des réflecteurs. Sous certaines hypothèses, nous montrons que la statistique de test obtenue est identique à [LON12] où les auteurs estiment le nombre  $K$  de réflecteurs à partir de la minimisation du critère d'information d'Akaike. Ils obtiennent alors une expression approchée du seuil de détection leur permettant de calculer la PD par simulation de Monte Carlo. Pour compléter les travaux de [LON12], nous avons analysé la statistique issue du GLRT intégrant la localisation inconnue des réflecteurs lorsque  $K$  est défini *a priori*. Notre contribution consiste à utiliser des résultats issus des statistiques d'ordre [BAL06] pour en déduire des approximations de la PFA et de la probabilité de détection et de localisation (PDL) prenant en compte conjointement la détection et la localisation des réflecteurs [ROU15b]. Puis, nous comparons le détecteur obtenu avec les différents détecteurs de la littérature en termes de PD.

Le troisième et dernier chapitre porte sur la conception d'une forme d'onde unique qui soit compatible avec deux chaînes de traitement basse et haute résolution. L'intérêt de ce système bi-résolution est le suivant : une fois une cible détectée en basse résolution, les mêmes échantillons sont exploités en vue d'obtenir un profil distance haute résolution. On peut alors tirer profit du faible coût calculatoire de la voie de traitement basse résolution la majeure partie du temps et utiliser la voie haute résolution uniquement lorsqu'une détection a eu lieu en basse résolution pour identifier la cible.

Concevoir une forme d'onde consiste à définir le ou les critère(s) d'intérêt puis à déterminer la forme d'onde qui les optimise. Dans ce cadre, nous dressons premièrement un bref état de l'art sur l'optimisation de formes d'onde. Nous définissons les différents critères couramment considérés ainsi que les familles de formes d'onde optimisées. Sachant que la mission principale du radar consiste à détecter une cible, un des critères fréquemment sélectionné est la maximisation de la PD. Toutefois, maximiser uniquement la PD n'offre pas de garantie d'obtenir une forme d'onde utilisable en pratique dans un radar et possédant les propriétés requises en termes de résolutions en distance et en fréquence. Pour pallier ces inconvénients, nous choisissons de nous focaliser sur l'optimisation de formes d'onde codées en phase et considérons la détection d'une cible ponctuelle en présence de fouillis gaussien. Ce scénario a notamment été étudié par De Maio *et al.* [DE 08, DE 10] où le signal considéré est un train d'impulsions contenant un code de phase inter-impulsion choisi de telle sorte à maximiser la probabilité de détection. Pour que le forme d'onde revête un caractère bi-résolution, nous étudions un train d'impulsions constitué de deux codes de phase : l'un inter-impulsion et l'autre intra-impulsion. Il s'agit alors de préciser le rôle de chaque code puis de traiter leur sélection. Pour cela, tenant compte de plusieurs critères à optimiser

dont la maximisation de la PD, la minimisation de la largeur du lobe principal du signal reçu, etc., nous suggérons d'étudier la pertinence d'une approche fondée sur les fronts de Pareto.

Nous traitons d'abord le cas mono-résolution [ROU15a]. Pour ce faire, le fouillis gaussien est modélisé par un processus autorégressif (AR). Cette modélisation, qui a déjà été utilisée dans [DE 08, PAT09, ABR08] ou encore [PET10], présente plusieurs avantages : 1/ elle permet de modéliser différents types de fouillis à partir d'un nombre réduit de paramètres ; 2/ on peut tirer avantage du fait qu'il existe une expression analytique de l'inverse de la matrice de covariance [CER91] pour exprimer le signal reçu après traitement ainsi que les critères d'optimisation en fonction des paramètres AR du modèle de fouillis. Nous analysons aussi la robustesse des codes de phase optimaux en calculant les fronts de Pareto pour différentes valeurs des paramètres AR. Dans un second temps, nous dérivons cette approche dans un cas bi-résolution [ROU14].

Nous terminons ce mémoire de thèse par des conclusions et perspectives.



# Chapitre 1

## Généralités sur le radar

---



## 1.1 Introduction

DANS ce chapitre, nous rappelons brièvement le principe de fonctionnement d'un radar. Puis, nous introduisons le modèle de cible couramment utilisé en radar lors de l'étude de la détection d'une cible, à savoir le modèle à multiples points brillants, également appelé modèle de cible étendue. Enfin, nous complétons la présentation de ce modèle en introduisant les modélisations statistiques pour les coefficients d'atténuation des signaux reçus après rétrodiffusion sur les points brillants d'une part, et pour les différents types de perturbations d'autre part.

## 1.2 Principe de fonctionnement d'un radar

Un système radar utilise la propriété d'une onde électromagnétique à se réfléchir sur un objet (couramment appelé cible) pour détecter la présence de ce dernier et déterminer ses caractéristiques telles que sa distance au radar, sa vitesse, etc. Sur la figure 1.1, nous considérons le cas d'un radar disposant d'une antenne capable d'orienter son diagramme d'émission<sup>1</sup> en azimut notée  $\phi$  et en élévation notée  $\theta$ .

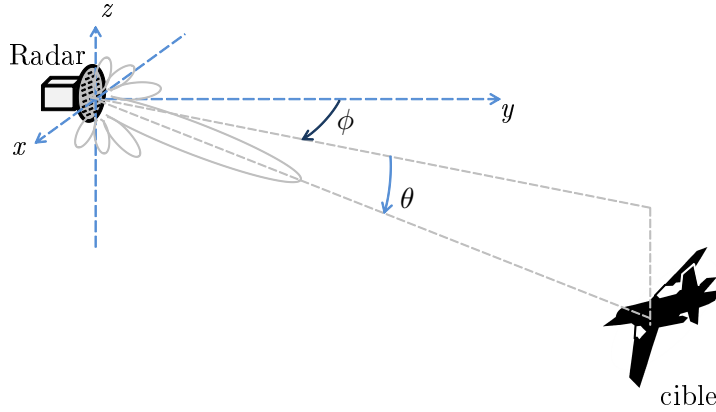
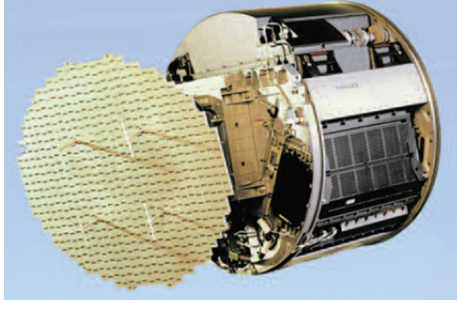


FIGURE 1.1 – Azimut  $\phi$  et élévation  $\theta$  de la cible par rapport au radar

Les premiers radars capables d'orienter le diagramme d'antenne utilisaient une antenne à balayage mécanique ; l'antenne possédait un diagramme d'antenne fixe et pour obtenir le gain maximal selon l'azimut et l'élévation souhaités, l'antenne pivotait sur deux axes pour orienter mécaniquement le diagramme. Des radars à balayage mécanique sont encore utilisés actuellement. C'est le cas notamment du Radar Doppler RDY conçu par Thomson-CSF (devenu Thales en décembre 2000) et présent sur certains avions Mirage 2000, Cf. Fig. 1.2a. Toutefois, lorsqu'il y a plusieurs cibles, l'orientation du faisceau vers ces cibles peut engendrer de fortes contraintes mécaniques. Pour pallier entre autre cet inconvénient, Thomson-CSF a conçu le Radar à balayage électronique<sup>2</sup> RBE2 pour lequel le filtrage spatial est effectué à partir des déphasages entre les différents éléments rayonnants de l'antenne. Cf. Fig. 1.2b.

1. Le diagramme d'antenne correspond à la variation du gain de l'antenne en fonction de l'azimut et de l'élévation.

2. Dans RBE2, le « 2 » fait référence aux deux plans utilisés au niveau de l'antenne permettant de passer d'une polarisation verticale à une polarisation horizontale et vice versa. Ce changement de polarisation permet au radar d'intégrer des modes air-sol et des modes air-air.



(a) radar RDY



(b) radar RBE2

FIGURE 1.2 – Radars à balayage mécanique et à balayage électronique

Quel que soit le type d'antenne, le principe de fonctionnement du radar est identique. Il est représenté sur la figure 1.3 et peut se décomposer en quatre étapes :

1. le radar émet une onde électromagnétique à une fréquence porteuse  $f_c$  selon l'azimut  $\phi$  et l'élévation  $\theta$ .
2. Une partie de l'énergie de l'onde émise atteint une cible.
3. Cette énergie est réfléchie dans plusieurs directions.
4. La part de l'énergie du signal rétrodiffusée en direction du radar est reçue par le radar puis amplifiée. Enfin, une étape de traitement du signal conduit à la prise d'une décision quant à la présence ou non d'une cible.

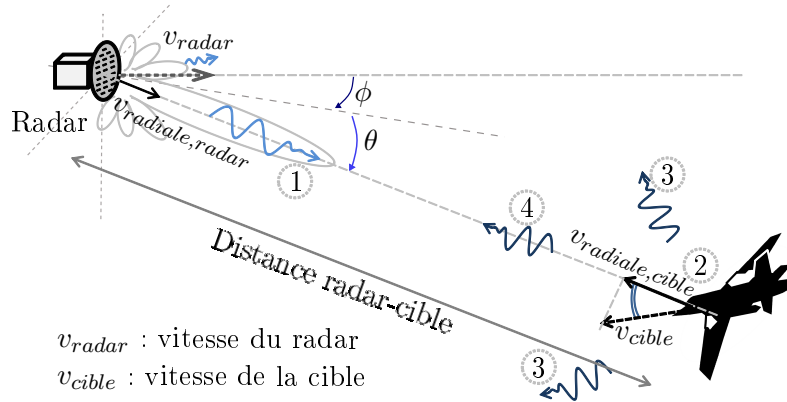


FIGURE 1.3 – Principe de fonctionnement d'un radar en quatre étapes

Ainsi, la chaîne de traitement radar à l'émission et à la réception qui correspond aux quatre étapes précédentes peut être représentée de manière schématique et simplifiée sur la figure 1.4. Le signal radar à émettre est modulé par la fréquence porteuse  $f_c$  puis amplifié avant d'être émis au niveau de l'antenne. A la réception, il y a une voie de démodulation en phase notée « Voie I » pour *in phase* et une voie de démodulation en quadrature de phase notée « Voie Q » pour *quadrature*. Pour chacune de ces voies, le signal reçu est amplifié, démodulé, filtré par un filtre passe-bas pour ne garder que le signal en bande de base, passé dans un convertisseur analogique/numérique (CAN) puis traité pour statuer sur la présence ou non d'une cible.

Sur la figure 1.4, nous avons représenté le cas d'un radar aéroporté dit monostatique où l'émission et la réception se font au même endroit avec la même antenne.

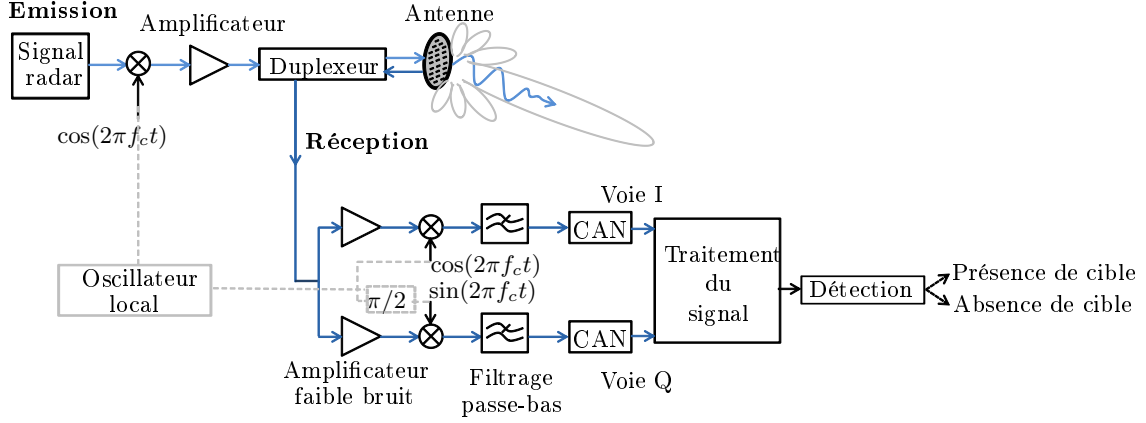


FIGURE 1.4 – Chaîne de traitement radar à l'émission et à la réception

*Remarque :* il existe d'autres types de radar comme le radar bistatique où l'émission et la réception se font à deux endroits différents.

Après avoir brièvement présenté le principe de fonctionnement d'un radar en termes d'émission et de réception d'une onde, nous étudions la modélisation du signal reçu.

### 1.3 Modèles des signaux

Le signal reçu par le radar après réflexion sur une cible est une version retardée et atténuée du signal émis où le retard et l'atténuation dépendent de la distance radar-cible. Ainsi, pour modéliser le signal reçu par le radar, nous explicitons premièrement la distance radar-cible. Puis, nous traitons le cas où la cible est modélisée par  $K$  réflecteurs élémentaires et donnons l'expression du signal reçu. Sous certaines hypothèses que nous précisons, nous aboutissons au modèle à  $K$  points brillants. Enfin, nous présentons des modèles statistiques pour les coefficients d'atténuation du signal reçu et pour les différents types de perturbations.

#### 1.3.1 Distance radar-cible

Soit  $\tau(t)$  le temps de trajet aller-retour de l'onde émise lorsqu'elle est reçue à l'instant  $t$ . La relation entre  $\tau(t)$  et la distance radar-cible à l'instant  $t$  notée  $R(t)$  s'écrit :

$$c \frac{\tau(t)}{2} = R \left( t - \frac{\tau(t)}{2} \right) \quad (1.1)$$

où  $c$  désigne la célérité de l'onde électromagnétique valant  $3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

La distance radar-cible en fonction du temps s'exprime par la relation :

$$R(t) = R_0 - v_{rr} t \quad (1.2)$$

avec :

- $R_0$  la distance radar-cible à l'instant  $t = 0$ ,
- $v_{rr}$  la vitesse radiale de la cible relative à la vitesse du radar  $v_{\text{radar}}$  et qui est telle que (Cf. Fig. 1.3) :

$$v_{rr} = v_{\text{radar}} \cos(\theta) \cos(\phi) - v_{\text{radiale, cible}} \quad (1.3)$$

La vitesse radiale  $v_{radiale, cible}$  de la cible est prise positive si la cible se rapproche du radar, et négative si la cible s'éloigne du radar.

En injectant (1.2) dans (1.1), il vient, après développement :

$$\tau(t) = \tau_0 - \frac{2v_{rr}}{c - v_{rr}}t \quad (1.4)$$

avec  $\tau_0$  le temps de trajet aller-retour à l'instant  $t = 0$  défini par :

$$\tau_0 = \frac{2R_0}{c - v_{rr}} \quad (1.5)$$

Dans la suite, nous utilisons l'expression (1.4) de  $\tau(t)$  pour le développement du modèle de signal reçu.

### 1.3.2 Expression générale du signal reçu : le modèle à $K$ points brillants

Le signal arrivant sur la cible est rétrodiffusé par les réflecteurs élémentaires constituant la cible. En pratique, les signaux rétrodiffusés par tous ces réflecteurs se combinent ou s'annulent de telle sorte que la cible peut être modélisée par un nombre  $K$  fini de réflecteurs élémentaires<sup>3</sup> « prépondérants en énergie », comme illustré sur la figure 1.5. Le signal reçu  $\tilde{y}$  à la fréquence porteuse  $f_c$  est la somme des  $K$  versions atténuées et retardées du signal émis  $s$  rétrodiffusé par ces  $K$  réflecteurs élémentaires en direction du radar :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^K a_k \Re \left[ s(t - \tau^{(k)}(t)) \exp(j2\pi f_c(t - \tau^{(k)}(t))) + b(t) \exp(j2\pi f_c t) + u(t) \exp(j2\pi f_c t) \right] \quad (1.6)$$

avec :

- $s$  le signal passe-bande émis de bande passante  $B$  et de durée  $T = NT_s$ ,
- $a_k \in \mathbb{R}$  le coefficient d'atténuation dû à la propagation du signal émis rétrodiffusé par le réflecteur  $k$  en direction du radar,
- $\tau^{(k)}(t)$  le temps mis par l'onde pour atteindre le réflecteur  $k$  de la cible et revenir au radar,
- $b$  le bruit thermique additif passe-bande,
- $u$  le bruit additif passe-bande dû à la rétrodiffusion du signal sur l'environnement (mer, sol, bâtiment, etc.). Ce second type de perturbation est appelé « fouillis », ou *clutter* en anglais.

D'après (1.4), le retard  $\tau^{(k)}(t)$  vérifie :

$$\tau^{(k)}(t) = \tau_0^{(k)} - \frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}}t \quad (1.7)$$

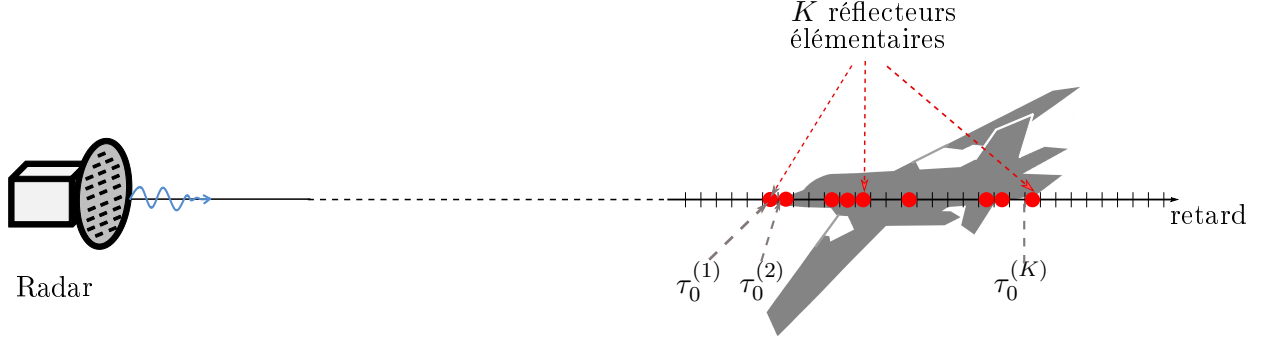
où  $v_{rr}^{(k)}$  désigne la vitesse radiale relative du  $k^{ième}$  réflecteur et, d'après (1.5),  $\tau_0^{(k)}$  est défini par :

$$\tau_0^{(k)} = \frac{2R_0^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} \quad (1.8)$$

avec  $R_0^{(k)}$  la distance entre le radar et le  $k^{ième}$  réflecteur à l'instant  $t = 0$ .

---

3. Les réflecteurs élémentaires sont également appelés « points brillants ».


 FIGURE 1.5 – Cible modélisée par  $K$  réflecteurs élémentaires

En insérant (1.7) dans (1.6), il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^K a_k \Re \left[ s \left( \left( 1 + \frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} \right) t - \tau_0^{(k)} \right) \exp(j2\pi f_c t) \exp \left( j2\pi f_c \frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} t \right) \right. \\ \left. \times \exp(-j2\pi f_c \tau_0^{(k)}) + b(t) \exp(j2\pi f_c t) + u(t) \exp(j2\pi f_c t) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Après démodulation, l'enveloppe complexe du signal reçu en bande de base  $y$  échantillonnée à  $T_s$  s'écrit :

$$y(lT_s) = \sum_{k=1}^K \alpha_k s \left( \left( 1 + \frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} \right) lT_s - \tau_0^{(k)} \right) \exp \left( j2\pi f_0^{(k)} lT_s \right) + b(lT_s) + u(lT_s) \quad (1.10)$$

où le coefficient complexe d'atténuation  $\alpha_k$  et la fréquence Doppler  $f_0^{(k)}$  sont définis par :

$$\alpha_k = a_k \exp \left( -j2\pi f_c \tau_0^{(k)} \right) \quad (1.11)$$

et :

$$f_0^{(k)} = 2 \frac{v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} f_c \quad (1.12)$$

En pratique dans les architectures de récepteurs radar, on note que la démodulation est effectuée en deux étapes selon le principe de l'hétérodynage afin de faciliter l'amplification et le filtrage.

A présent, nous analysons les termes  $\frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}}$  et  $v_{rr}^{(k)}$  du signal reçu (1.10) permettant d'effectuer des hypothèses simplificatrices sur l'expression du signal reçu.

### a) Approximation bande-étroite

Dans (1.10), le terme  $\frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}}$  correspond à un effet de dilatation du signal. Sachant que le signal émis est de durée  $T$ , le décalage temporel maximal induit par la dilatation vaut alors  $\frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} T$ . On considère que cet écart temporel peut être ignoré lorsqu'il est négligeable devant  $1/B$ , c'est-à-dire :

$$\frac{2v_{rr}^{(k)}}{c - v_{rr}^{(k)}} T \ll \frac{1}{B} \quad (1.13)$$

4. Lorsque le traitement à la réception est le filtre adapté,  $1/B$  correspond au pas de résolution temporelle.

Sachant que pour des vitesses usuelles de cibles,  $v_{rr}^{(k)} \ll c$ , (1.13) peut être approximé comme suit :

$$\frac{2v_{rr}^{(k)}}{c}BT \ll 1 \quad (1.14)$$

Dans ce cas, sous l'hypothèse (1.14), on a :

$$s \left( \left( 1 + \frac{2v_{rr}^{(k)}}{c} \right) lT_s - \tau_0^{(k)} \right) \approx s \left( lT_s - \tau_0^{(k)} \right) \quad (1.15)$$

En radar, ainsi que dans les communications numériques, (1.15) est connue sous le nom d'« approximation bande étroite ».

*Exemple :* On considère une cible à un point brillant se rapprochant du radar et telle que sa vitesse radiale relative soit de  $1500 \text{ km.h}^{-1}$ , c'est-à-dire environ  $470 \text{ m.s}^{-1}$ . Une durée d'impulsion typique est  $T = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  avec une bande passante  $B = 150 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ . Dans ce cas,  $\frac{2v_{rr}}{c}BT = 0,047 \ll 1$ .

La seconde approximation usuelle en radar consiste à supposer que les vitesses radiales relatives des réflecteurs élémentaires sont identiques. Dans ce cas, d'après (1.12), les fréquences Doppler induites par les vitesses de chaque réflecteur sont les mêmes. En notant  $v_{rr}$  la vitesse radiale relative des réflecteurs, la fréquence Doppler  $f_0$  associée vérifie :

$$f_0 = 2 \frac{v_{rr}}{c - v_{rr}} f_c \approx 2 \frac{v_{rr}}{c} f_c \quad (1.16)$$

En pratique, la vitesse radiale d'une cible est obtenue à partir de la mesure de la fréquence Doppler donnée par l'approximation (1.16).

En tenant compte de l'hypothèse de bande étroite du signal reçu et de (1.16), (1.10) peut se mettre sous la forme suivante :

$$y(lT_s) = \sum_{k=1}^K \alpha_k s \left( lT_s - \tau_0^{(k)} \right) \exp(j2\pi f_0 lT_s) + b(lT_s) + u(lT_s) \quad (1.17)$$

En concaténant les  $L$  échantillons du signal reçu  $y$  dans le vecteur colonne  $\mathbf{y}$ , on aboutit au modèle dit « à  $K$  points brillants » :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_{\tau_0, f_0} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} + \mathbf{u} \quad (1.18)$$

avec :

$$\mathbf{X}_{\tau_0, f_0} = \mathbf{D}_{f_0} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(\tau_0^{(1)}) & \mathbf{s}(\tau_0^{(2)}) & \cdots & \mathbf{s}(\tau_0^{(K)}) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

où :

$$\mathbf{D}_{f_0} = \text{diag}(1, \exp(j2\pi f_0 T_s), \dots, \exp(j2\pi f_0 (L-1)T_s)) \quad (1.20)$$

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \begin{bmatrix} \tau_0^{(1)} & \tau_0^{(2)} & \cdots & \tau_0^{(K)} \end{bmatrix}^T \quad (1.21)$$

et :

$$\mathbf{s}(\tau_0^{(k)}) = \begin{bmatrix} s(-\tau_0^{(k)}) & s(T_s - \tau_0^{(k)}) & \cdots & s((L-1)T_s - \tau_0^{(k)}) \end{bmatrix}^T, \quad k = 1, \dots, K \quad (1.22)$$

$\alpha$  est le vecteur colonne de taille  $K$  défini par :

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_K]^T \quad (1.23)$$

$\mathbf{b}$  et  $\mathbf{u}$  sont les vecteurs colonnes de taille  $L$  contenant les échantillons du bruit thermique et du fouillis donnés par :

$$\mathbf{b} = [b(0) \quad b(T_s) \quad \cdots \quad b((L-1)T_s)]^T \quad (1.24)$$

$$\mathbf{u} = [u(0) \quad u(T_s) \quad \cdots \quad u((L-1)T_s)]^T \quad (1.25)$$

### b) Limite de l'approximation bande étroite

Lorsque le signal émis est une succession de  $M$  impulsions  $s_{T_0}$  de durée  $T_0$  espacées d'une durée  $T_r$  appelée période de récurrence, c'est-à-dire lorsque le signal émis vérifie :

$$s(lT_s) = \sum_{m=0}^{M-1} s_{T_0}(lT_s - mT_r) \quad (1.26)$$

alors le signal reçu après rétrodiffusion sur le réflecteur  $k$  peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} s_{T_0} \left( \left( 1 + \frac{2v_{rr}}{c} \right) (lT_s - mT_r) - \tau_0^{(k)} \right) \exp(j2\pi f_0 lT_s) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} s_{T_0} \left( lT_s - mT_r + \frac{2v_{rr}}{c} lT_s - \frac{2v_{rr}}{c} mT_r - \tau_0^{(k)} \right) \exp(j2\pi f_0 lT_s) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Sous l'hypothèse de bande étroite du signal reçu, (1.27) s'approxime comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} s_{T_0} \left( lT_s - mT_r + \frac{2v_{rr}}{c} lT_s - \frac{2v_{rr}}{c} mT_r - \tau_0^{(k)} \right) \exp(j2\pi f_0 lT_s) \\ & \approx \sum_{m=0}^{M-1} s_{T_0} \left( lT_s - mT_r - \frac{2v_{rr}}{c} mT_r - \tau_0^{(k)} \right) \exp(j2\pi f_0 lT_s) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dans (1.28), il reste le terme  $\frac{2v_{rr}}{c} mT_r$ , où  $m$  varie de 0 à  $M-1$ . De manière analogue au cas de l'hypothèse de bande étroite,  $\frac{2v_{rr}}{c} mT_r$  est négligeable lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{2v_{rr}}{c} MT_r B \ll 1 \quad (1.29)$$

Cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite en pratique. Dans ce cas, le terme  $\frac{2v_{rr}}{c} mT_r B$  induit le phénomène appelé « migration distance » qui est d'autant plus important que la cible se déplace rapidement et que le nombre  $M$  d'impulsions est grand. Des traitements ont été proposés pour compenser ces migrations distances ; le lecteur peut se référer par exemple à [PER07] ou plus récemment à [DEU11].

Dans le cadre de notre étude, nous supposons que le nombre  $L$  d'échantillons du signal reçu est tel que la cible peut être considérée comme « immobile » pendant la durée  $LT_s$ .

A ce stade, nous nous sommes concentrés sur les hypothèses permettant de simplifier les termes relatifs au signal  $s$  dans l'expression du signal reçu (1.10). Concernant les échantillons du

bruit thermique, ils sont modélisés par des variables aléatoires gaussiennes circulaires indépendantes de variance  $\sigma^2$ . On a alors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^H] = \sigma^2 \mathbf{I}_L \quad (1.30)$$

Dans le prochain paragraphe, nous étudions la modélisation des coefficients d'atténuations  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$  et des échantillons du vecteur  $\mathbf{u}$  issu du fouillis.

## 1.4 Modélisation des coefficients d'atténuation

### 1.4.1 Phénomène physique

La valeur du module de chaque coefficient d'atténuation dépend de la puissance du signal reçu à la sortie du récepteur  $I/Q$ . Pour obtenir cette puissance, le bilan de liaison radar doit être calculé.

La densité de puissance du signal reçu par un élément de surface  $dS$  de la cible située à la distance  $R$  s'écrit, par définition du gain d'antenne  $G$  [SKO81] :

$$dP_{cible} = G \frac{P_c}{4\pi R^2} dS \quad (1.31)$$

où  $P_c$  est la puissance crête émise par le radar.

La densité de puissance du signal réfléchi par la cible s'écrit en fonction du paramètre appelé « Surface Équivalente Radar » (SER) et noté  $\sigma_{SER}$ . D'après [LE 89], la SER est « la surface dont il faudrait disposer, si elle rétrodiffusait de façon isotrope dans tout l'espace, pour renvoyer un écho<sup>5</sup> de même puissance que celui effectivement reçu par le récepteur ».

Après avoir parcouru le trajet retour, le signal rétrodiffusé arrive sur l'antenne avec la puissance  $P_{re\acute{c}ue}$  qui s'écrit en fonction de (1.31) et de la SER de la cible :

$$P_{re\acute{c}ue} = G \frac{P_c}{(4\pi R^2)^2} \sigma_{SER} \quad (1.32)$$

La capacité d'une antenne à capter l'énergie reçue et à la transmettre au récepteur est définie au travers de la surface équivalente de l'antenne dont l'expression est [SKO81] :

$$A_e = \lambda_c^2 \frac{G_{rec}}{4\pi} \quad (1.33)$$

où  $\lambda_c$  est la longueur d'onde de la fréquence porteuse et  $G_{rec}$  est le gain en réception. Dans le cas du radar monostatique, il est égal au gain à l'émission<sup>6</sup>  $G$ .

Ainsi, la puissance crête reçue au point de référence radar s'écrit à partir de (1.32) et (1.33) :

$$P_r = \frac{A_e}{L_{pertes}} P_{re\acute{c}ue} = G \frac{G \lambda_c^2 P_c}{(4\pi)^3 L_{pertes} R^4} \sigma_{SER} \quad (1.34)$$

où  $L_{pertes}$  représente les pertes dues au radôme, les pertes hyperfréquences et les pertes atmosphériques. Les pertes hyperfréquences sont les pertes engendrées par les composants électroniques situés entre l'antenne et l'émetteur/le récepteur tels que le guide d'onde, le duplexeur, etc. Ces

---

5. On parle d'« écho » de cible pour désigner le signal rétrodiffusé par la cible vers le radar.

6. Dans le cas d'un radar bistatique, le gain d'antenne à l'émission n'est pas nécessairement égal au gain d'antenne à la réception.



pertes, ainsi que les pertes dues au radôme peuvent être estimées à partir de mesures alors que les pertes atmosphériques varient en fonction des différentes caractéristiques de l'atmosphère, de la distance  $R$  et de la longueur d'onde  $\lambda_c$ .

Dans (1.34), seuls les paramètres  $L_{pertes}$ ,  $R$  et  $\sigma_{SER}$  sont inconnus. Pour une distance  $R$  donnée, le coefficient d'atténuation varie donc avec la SER et les pertes atmosphériques. Les caractéristiques de l'atmosphère dépendent de nombreux paramètres inconnus (pression, température, etc.), mais les pertes atmosphériques communément admises sont de l'ordre de quelques décibels [DAR81, chap. 11]. Pour ce qui est de la SER d'une cible donnée, elle dépend également de nombreux paramètres tels que la longueur d'onde, l'angle d'incidence de l'onde émise sur l'objet, la forme de l'objet, etc. Il existe plusieurs approches pour la calculer. Ainsi, en modélisant la cible comme un ensemble d'objets « simples » dont les SER sont données par des formules approchées, la SER de la cible peut être estimée en sommant les contributions individuelles de ces objets « simples ». Un exemple des différents phénomènes de propagation qui peuvent se produire sur une cible est illustré sur la figure 1.6 (source : [SKO08, ch. 14] citant Knott dans [HEM92, ch. 4]).

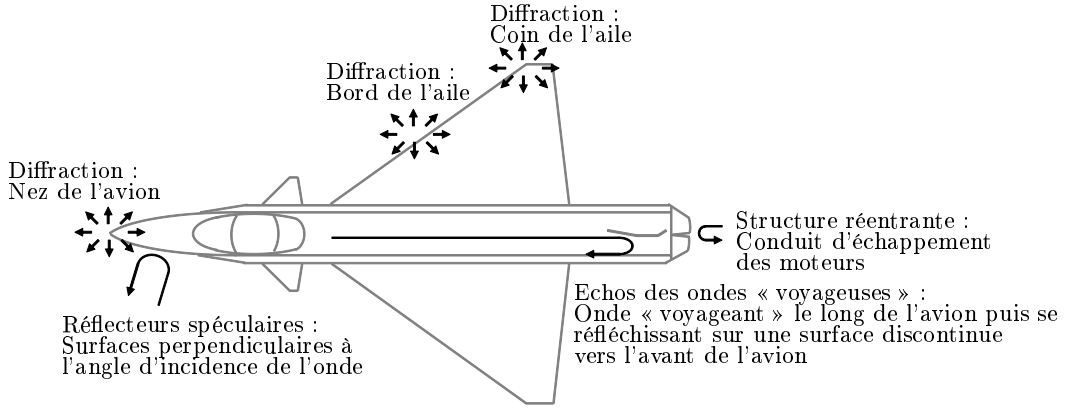


FIGURE 1.6 – Exemples de mécanismes de réflexion de l'onde électromagnétique sur une cible

Avec l'augmentation de la puissance de calcul de processeurs, une deuxième approche consiste à utiliser des logiciels de calcul de SER tels que X-Patch [AND00] ou encore le logiciel de S. A. Gorshkov *et al.* [GOR02]. Ils sont fondés sur la résolution des équations de Maxwell. Enfin, la SER d'une cible peut être aussi mesurée [KNO93]. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'une cible de plusieurs dizaines de mètres de long, la mise en œuvre de ces tests requiert des moyens logistiques et économiques importants.

Ainsi, puisque la SER dépend de nombreux paramètres inconnus d'une part, et d'autre part que la cible est inconnue *a priori*, une modélisation alternative du coefficient de réflexion consiste à considérer la SER comme un processus aléatoire [SWE54]. Cela revient à modéliser les coefficients d'atténuation par des processus aléatoires.

## 1.4.2 Modèles statistiques

De nombreuses modélisations statistiques ont été proposées pour les coefficients de réflexion  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$  présents dans les modèles de signaux reçus à  $K$  points brillants (1.18). Parmi les modèles statistiques les plus couramment utilisés en radar, les modèles de Swerling I, II, III et IV

sont relativement populaires. Les modèles de Swerling I et II reposent sur l'hypothèse que chaque coefficient d'atténuation est la contribution de plusieurs réflecteurs indépendants de puissance uniforme et dont les phases sont supposées aléatoires et équiréparties sur  $[0; 2\pi[$ . Dans ce cas, en s'inspirant du théorème centrale limite (TCL), les variables  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$  peuvent être modélisées comme des variables aléatoires gaussiennes circulaires de variances  $\gamma_1^2, \dots, \gamma_K^2$  respectivement. Dans le modèle de Swerling I, les coefficients d'atténuation sont supposés constants durant un train d'impulsions mais varient d'un train à l'autre. Concernant le modèle de Swerling II, les coefficients d'atténuation varient d'impulsion à impulsion. Cela correspond à une cible dont les coefficients d'atténuation fluctuent plus rapidement par rapport au cas Swerling I. Le modèle de fluctuation de Swerling III traite le cas où un des coefficients  $\alpha_k$  est prépondérant sur tous les autres. Swerling propose une loi du  $\chi^2$  à quatre degrés de liberté pour la distribution de chaque variable  $4|\alpha_1|^2/\gamma_1^2, \dots, 4|\alpha_K|^2/\gamma_K^2$ . Comme pour le cas du modèle de Swerling II par rapport au modèle de Swerling I, le modèle de Swerling IV correspond à une fluctuation d'impulsion à impulsion alors que le modèle de Swerling III correspond à une fluctuation de train à train.

Dans certains cas, les coefficients d'atténuation sont modélisés par des variables déterministes inconnues. Ils sont alors qualifiés de « non fluctuants » et sont regroupés sous l'appellation « modèle de Swerling 0 » (ou Swerling V). Ce modèle est couramment utilisé en radar comme cas de référence.

D'autres modélisations statistiques ont été proposées [DE 04]. En effet, s'appuyant sur des données réelles où la cible est un navire comportant de larges surfaces planes de fortes SERs par exemple, la loi gaussienne ne suffit pas pour modéliser les fortes valeurs des coefficients d'atténuation. Afin de disposer d'une queue de distribution plus lourde, on peut envisager la loi log-normale [SHN91], la loi de Weibull [CUI14], etc.

Dans le cadre de nos travaux, nous considérons les modèles de Swerling I et Swerling 0.

Disposant des modèles statistiques des coefficients d'atténuation du signal reçu, nous introduisons les modèles statistiques des perturbations afin de compléter la caractérisation statistique du modèle de signal reçu à  $K$  points brillants (1.18).

## 1.5 Modélisation du fouillis

De manière analogue au cas d'une cible, la capacité de l'environnement à rétrodiffuser le signal incident est caractérisée par la valeur de sa SER. Celle-ci varie en fonction de nombreux paramètres tels que les caractéristiques du sol (forêt, montagne, etc.) ou de la mer (hauteur des vagues, force du vent, etc.), l'angle d'incidence de l'onde sur le sol ou la mer, etc. [LAC01]. Sachant que ces paramètres sont inconnus *a priori*, le fouillis est modélisé par un processus aléatoire. Nous présentons différentes distributions statistiques couramment utilisées en radar puis les propriétés du fouillis en termes de corrélation.

Plusieurs distributions ont été proposées à partir de données réelles acquises dans des scénarios différents. Par exemple lorsque la mer est calme et que l'angle d'incidence du signal émis arrivant sur la mer est suffisamment élevé, c'est-à-dire supérieur à  $10^\circ$  comme représenté sur la figure 1.7, le signal reçu par le radar après rétrodiffusion sur la mer est la somme des contributions des différents réflecteurs élémentaires. Par application du TCL sur l'ensemble des variables aléatoires indépendantes modélisant les coefficients d'atténuation des signaux rétrodiffusés par

les réflecteurs, l'amplitude<sup>7</sup> du signal renvoyé par la mer est caractérisée statistiquement par une loi de Rayleigh<sup>8</sup> [SKO81]. Cette loi est également utilisée pour du fouillis de sol lorsque ce dernier est un champs où le fouillis est « homogène », c'est-à-dire que les énergies rétrodiffusées par les différents réflecteurs élémentaires du sol sont du même ordre de grandeur. Dans ce cas, le seul paramètre inconnu pour caractériser la loi de Rayleigh est la variance du fouillis. En radar, celle-ci est couramment estimée à partir de données secondaires<sup>9</sup>.

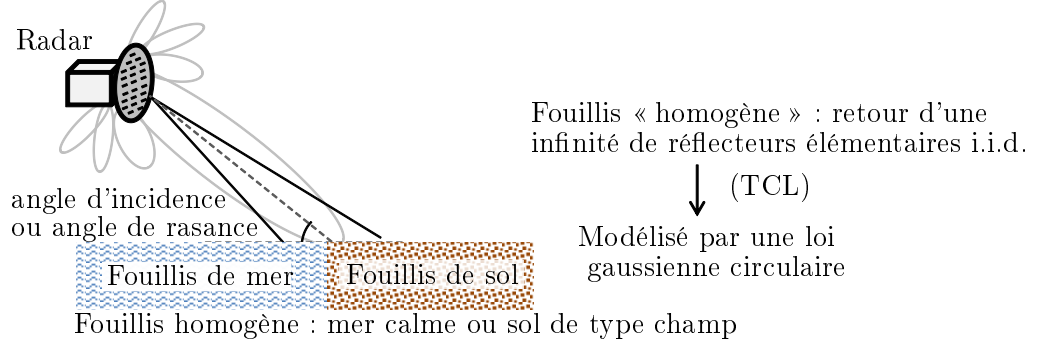


FIGURE 1.7 – Modélisation du fouillis

Lorsqu'on observe des pics<sup>10</sup> au niveau de l'amplitude du signal reçu, le fouillis ne peut plus être modélisée par une loi de Rayleigh. C'est notamment le cas lorsque l'angle d'incidence est faible et que la mer est plus agitée ou qu'il s'agit d'un sol montagneux. En effet, lorsque l'angle d'incidence est plus faible, les disparités de la mer (vagues, écume) ou du sol (rochers) sont amplifiées. Pour modéliser ces fortes amplitudes, plusieurs lois ayant des queues de distribution plus lourdes ont été proposées telles que la loi log-normale<sup>8</sup> ou encore la loi de Weibull<sup>8</sup> [CHE14, chap. 11]. Pour ces lois, différentes méthodes peuvent alors être utilisées pour estimer leurs paramètres à partir de données réelles telles que le maximum de vraisemblance, le critère d'information d'Akaike [SAY01] ou encore la divergence de Kullback-Leibler [RIT11]. Parmi les lois alternatives à la loi de Rayleigh pour modéliser le fouillis de mer, Ward *et al.* [WAR13] ont considéré une loi composée telle que la loi K<sup>8</sup> permettant de modéliser les variations « lentes » induites par le mouvement des vagues et regroupées sous l'appellation « texture » d'une part, et d'autre part les variations « rapides » issues des réflecteurs élémentaires et regroupées dans l'appellation anglaise « speckle » (Cf. Fig. 1.8). Dans [SAY01], les auteurs ont montré que la loi K peut aussi convenir pour des données issues de fouillis de sol.

Enfin, on peut citer la distribution d'une variable aléatoire sphériquement invariante, notée SIRV d'après l'appellation anglaise *Spherically Invariant Random Variable*. Les SIRV permettent de modéliser des fouillis hétérogènes à partir d'une variable aléatoire distribuée selon une loi complexe gaussienne composée, c'est-à-dire une loi gaussienne complexe dont la variance est une variable aléatoire [OVA11]. La loi gaussienne complexe correspond à la distribution de la texture alors que la distribution de la variance correspond à la distribution du speckle. On note que lorsque la distribution de la variance est une loi Gamma, le module au carré d'une SIRV est

7. Le terme « amplitude » fait référence au module du coefficient d'atténuation.

8. La densité de probabilité de cette loi est rappelée en annexe A.

9. Les données dites « secondaires » correspondent à des échantillons du signal reçu pour lesquels on suppose qu'il n'y a pas de cible.

10. On parle de *spikes* en anglais.

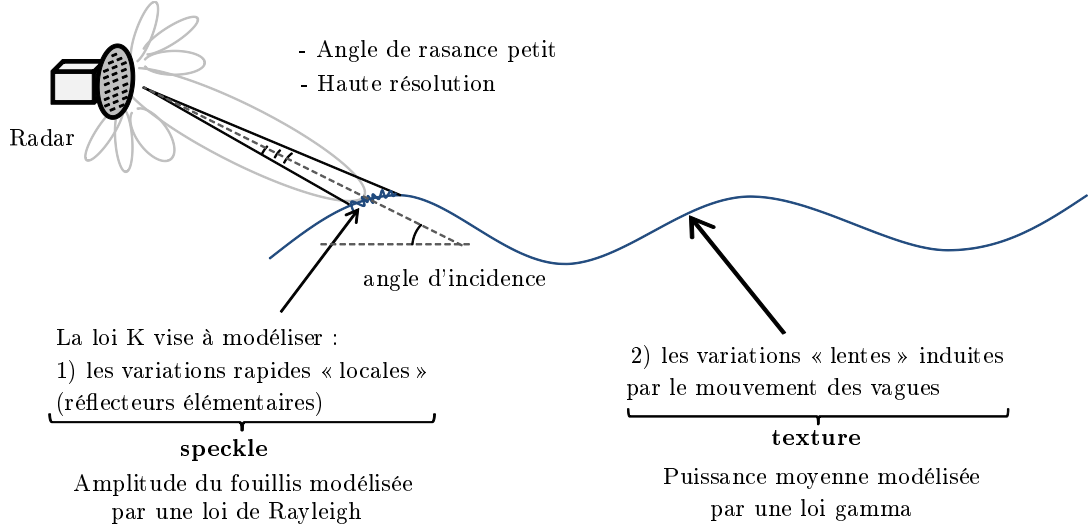


FIGURE 1.8 – Fouillis hétérogène : exemple du fouillis de mer modélisé par une loi K

distribuée selon une loi K.

En plus de la distribution de l'amplitude des échantillons du signal reçu, le fouillis peut être caractérisé par son spectre Doppler. En effet, le mouvement des réflecteurs élémentaires du fouillis induit un décalage en fréquence Doppler du signal reçu caractéristique. Par exemple, ce phénomène peut être dû au mouvement des branches d'arbre ou des vagues induit par le vent. Pour caractériser ce phénomène, une première approche consiste à modéliser la densité spectrale de puissance du fouillis. En notant que le spectre du fouillis<sup>11</sup> a plutôt une nature basse fréquence par rapport à la fréquence Doppler induite par la vitesse radiale des cibles aériennes, plusieurs fonctions ont été proposées pour décrire l'étalement spectral, par exemple :

- une fonction gaussienne [WAT11]. Dans ce cas, la variance dépend du type de terrain (sol rocheux, forêt, ville, mer agitée, mer calme, etc.) et la moyenne, qui peut varier au cours du temps, dépend principalement de la vitesse du vent. Dans [WAL00], les auteurs considèrent une somme de fonctions gaussiennes afin de tenir compte des phénomènes macro et microscopiques constituant le fouillis ;
- une fonction exponentielle [LOM01] ;
- une dernière alternative consiste à représenter le fouillis par un modèle autorégressif (AR) [DE 08, ABR08, DE 09a, PET10]. Ce modèle permet notamment de modéliser des fouillis aux propriétés spectrales variées à partir de peu de paramètres. Pour une modélisation AR d'ordre  $p$ , les échantillons du fouillis vérifient :

$$u(lT_s) = \sum_{i=1}^p a_i u((l-i)T_s) + w(lT_s) \quad (1.35)$$

avec  $w(lT_s)$  les échantillons du processus générateur gaussien circulaire de variance  $\sigma_w^2$  et  $\{a_i\}_{i=1,\dots,p}$  les paramètres AR.

Dans ce cas, le densité spectrale de puissance du fouillis associée peut s'exprimer comme

11. Par abus de langage, le « spectre du fouillis » correspond à la densité spectrale de puissance des échantillons du fouillis induit par l'effet Doppler.

suit :

$$\begin{aligned}
 |S(f)|^2 &= \sigma_w^2 \left| \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \right|_{z=\exp(j2\pi \frac{f}{f_s})}^2 \\
 &= \sigma_w^2 \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^p (1 - p_i z^{-1})} \right|_{z=\exp(j2\pi \frac{f}{f_s})}^2
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

où  $f_s$  est la fréquence d'échantillonnage et  $(p_i)_{i=1,\dots,p}$  désignent les pôles pouvant caractériser jusqu'à  $p$  résonances du spectre du fouillis dans la bande spectrale  $[-f_s/2; f_s/2[$ .

A titre d'illustration, nous représentons les cas des fonctions exponentielle et gaussienne ainsi que le cas de la modélisation AR sur la figure 1.9. Pour cela, nous nous appuyons sur l'analyse de [LOM01] pour des données réelles issues d'un radar<sup>12</sup> « Phase One » pointant sur une zone boisée avec une fréquence d'émission de  $9,2\text{ GHz}$ . Pour la fonction exponentielle, le paramètre d'échelle tel que la fonction exponentielle se rapproche le plus de la DSP des données réelles vaut  $0.15s$  et pour la fonction gaussienne, l'écart-type de la fonction gaussienne qui correspond le mieux à la DSP des données réelles vaut  $15\text{ Hz}$ . Pour le cas de la modélisation AR, De Maio *et al.* considèrent un processus AR d'ordre 1 dont le paramètre AR fixé *a priori* vaut 0.8. Sachant que le spectre Doppler du fouillis est représenté de  $-250\text{ Hz}$  à  $250\text{ Hz}$  dans [LOM01], nous avons pris  $f_s = 500\text{ Hz}$  pour la modélisation AR. Toutefois, au delà de  $60\text{ Hz}$ , la puissance du fouillis est voisine ou inférieure à celle du bruit thermique. Nous avons donc tracé les DSP des spectres Doppler entre  $-60\text{ Hz}$  et  $+60\text{ Hz}$ .

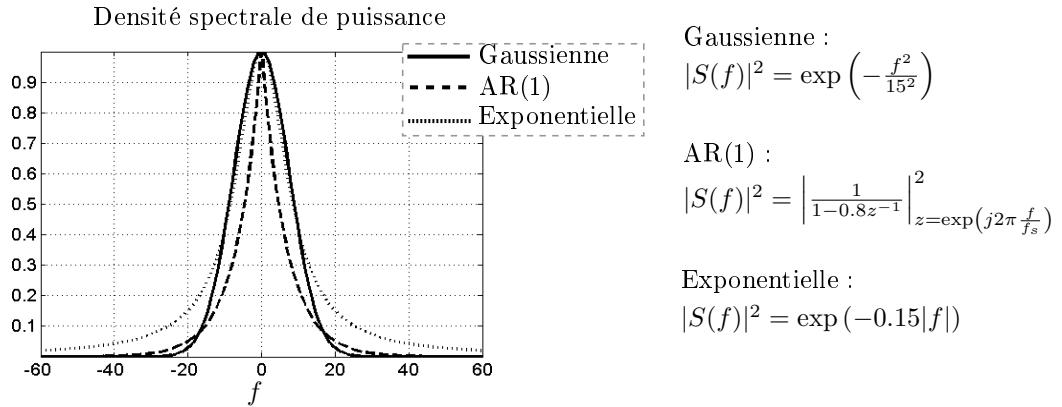


FIGURE 1.9 – Exemples de spectres Doppler de fouillis

Une fois le modèle choisi, il s'agit de déterminer le traitement de détection et les performances de détection associées.

A partir de ce bref état de l'art sur la modélisation statistique du fouillis, nous étudions au chapitre 3 l'optimisation de formes d'onde lorsque le signal reçu est perturbé par un fouillis gaussien et nous traitons le cas particulier où les propriétés de corrélation du fouillis sont modélisées par un processus AR.

12. Pour plus de détails sur le radar « Phase One », le lecteur peut se référer à [BIL02, Annexe 3.A]

## 1.6 Conclusions

Nous avons introduit le modèle de signal à  $K$  points brillants. Pour ce modèle, nous avons choisi des modélisations statistiques pour les coefficients de réflexion  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$  et des modélisations statistiques pour la perturbation  $u$  due au fouillis. Parmi les différents modèles pour les coefficients de réflexion, nous optons pour les modèles couramment utilisés en radar de Swerling 0 et Swerling I. Quant à la perturbation, sa distribution influence les performances de détection d'une cible.

Ainsi, dans la première partie du chapitre 2, nous analysons la détection d'une cible ponctuelle dans les deux cas suivants : le signal reçu est perturbé uniquement par le bruit thermique et le signal reçu est perturbé par le bruit thermique et un fouillis gaussien. Dans la seconde partie du chapitre 2, nous tirons profit des modèles statistiques introduits pour établir un test de détection pour le modèle à plusieurs points brillants. Nous analysons alors ce test en termes de performances de détection, c'est-à-dire en termes de probabilité de fausse alarme et de probabilité de détection. Enfin, nous étudions la détection d'une cible ponctuelle perturbée par un fouillis gaussien au chapitre 3.



## Chapitre 2

# Détection d'une cible étendue : état de l'art et contribution

---

---

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Principe de fonctionnement d'un radar</b>	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Modèles des signaux</b>	<b>8</b>
1.3.1	Distance radar-cible	8
1.3.2	Expression générale du signal reçu : le modèle à $K$ points brillants	9
<b>1.4</b>	<b>Modélisation des coefficients d'atténuation</b>	<b>13</b>
1.4.1	Phénomène physique	13
1.4.2	Modèles statistiques	14
<b>1.5</b>	<b>Modélisation du fouillis</b>	<b>15</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>19</b>

---



## 2.1 Introduction

D'E manière générale, l'étude de la détection d'une cible comprend deux aspects : la définition d'un traitement de détection d'une part, et d'autre part, la caractérisation du test de détection obtenu en termes de probabilité de fausse alarme (PFA) et de probabilité de détection (PD). Dans ce chapitre, nous considérons une cible modélisée par  $K$  points brillants non nécessairement consécutifs répartis sur  $Q$  cases distance et nous analysons le cas où le signal reçu est perturbé par un bruit gaussien circulaire. En pratique, ce scénario peut correspondre à une configuration de détection air-air ou air-mer lorsque la mer est peu agitée. On note que les positions et amplitudes de ces  $K$  points brillants sont comme une signature de la cible. Ainsi, pour identifier la cible, le test de détection doit permettre de détecter mais également de localiser les  $K$  points brillants.

Après un rappel des résultats usuels en radar concernant la détection d'une cible ponctuelle - c'est-à-dire avec  $K = 1$  réflecteur sur  $Q = 1$  case distance - en présence de bruit gaussien, nous nous focalisons sur le cas où  $K$  et  $Q$  sont quelconques et où le bruit gaussien est blanc. Nous dressons alors un état de l'art des différentes approches proposées dans la littérature et qui sont fondées sur le test du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT pour *generalized likelihood ratio test*) sous différentes hypothèses [VAN71, SHN98, GER97, LON12]. Toutefois, certains ne permettent pas de localiser les réflecteurs élémentaires, alors que pour d'autres, il n'y a pas d'expressions analytiques pour la PFA et la PD. Ainsi, nous proposons d'analyser le GLRT prenant en compte les positions inconnues de ces réflecteurs. Notre contribution porte alors sur la caractérisation du test de détection obtenu en termes de PFA et de probabilité de détection et de localisation (PDL) lorsque  $K$  est supposé connu *a priori*. Enfin, nous terminons ce chapitre par une étude comparative entre le détecteur étudié et les différents détecteurs présentés dans l'état de l'art.

## 2.2 Rappels sur la détection d'une cible composée d'un seul point brillant

### 2.2.1 Détection en présence de bruit thermique

Dans le cas d'une cible à  $K = 1$  point brillant en présence de bruit thermique de variance  $\sigma^2$  supposée connue, l'expression (1.18) du signal reçu peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} \quad (2.1)$$

L'objectif du test de détection est de déterminer si le signal reçu contient un écho de cible ou non. Pour cela, on définit les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} H_0 \text{ (absence d'une cible)} : \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ H_1 \text{ (présence d'une cible)} : \mathbf{y} &= \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.2)$$

On désigne par  $p_{H_0}$  et  $p_{H_1}$  les densités de probabilité de  $\mathbf{y}$  sous les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  respectivement. Concernant le coefficient d'atténuation  $\alpha$  du signal reçu, nous considérons le cas où  $\alpha$

est déterministe inconnu. Le test statistique utilisé est le GLRT dont l'expression est :

$$S(\mathbf{y}) = \frac{\max_{\tau, f, \alpha} p_{H_1}(\mathbf{y}; \tau, f, \alpha)}{p_{H_0}(\mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \epsilon \quad (2.3)$$

Dans la suite, on développe (2.3) pour aboutir au traitement de détection, puis on en déduit la PFA et la PD.

### 2.2.1.1 Traitement de détection

Étant donné que  $\mathbf{b}$  est un bruit blanc gaussien circulaire de variance  $\sigma^2$  supposée connue, les vraisemblances pour les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  ont pour expressions :

$$p_{H_0}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^L} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y}\|^2\right) \quad (2.4)$$

et :

$$p_{H_1}(\mathbf{y}; \tau, f, \alpha) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^L} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y} - \alpha \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau)\|^2\right) \quad (2.5)$$

Le rapport de vraisemblance généralisé (2.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) &= \frac{\max_{\tau, f, \alpha} p_{H_1}(\mathbf{y}; \tau, f, \alpha)}{p_{H_0}(\mathbf{y})} \\ &= \max_{\tau, f, \alpha} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} (\|\mathbf{y} - \alpha \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau)\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2)\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

En pratique, le GLRT repose sur l'hypothèse d'une cible unique, c'est-à-dire que si l'on détermine le retard  $\tau$  et la fréquence  $f$  qui maximisent le rapport des vraisemblances, une seule cible est détectée. Toutefois, en pratique, la zone couverte par le radar contient plusieurs cibles à détecter. Afin de s'affranchir de cette hypothèse, on calcule le GLRT pour des valeurs fixes de  $\tau$  et  $f$ . Ces valeurs candidates pour  $\tau$  et  $f$  donnent lieu à une discrétisation des axes en  $\tau$  et  $f$ .

Lorsque l'hypothèse  $H_1$  est vérifiée, on montre que l'estimée  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  au sens du maximum de vraisemblance a pour expression :

$$\hat{\alpha} = \frac{\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{y}}{\|\mathbf{s}^H(\tau)\|^2} \quad (2.7)$$

Puisque la fonction logarithme est strictement croissante, le test du GLRT n'est pas modifié lorsqu'on prend le logarithme népérien de  $S$ . En remplaçant  $\alpha$  par son estimée  $\hat{\alpha}$  et en notant que  $\|\mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau)\|^2 = \|\mathbf{s}(\tau)\|^2$ , le test du rapport de vraisemblance généralisé vérifie :

$$\ln(S(\mathbf{y})) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{|\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{s}^H(\tau)\|^2} \lesseqgtr \epsilon \quad (2.8)$$

Dans la suite de ce document, on fait l'hypothèse que le signal émis est d'énergie unitaire sans perte de généralité, c'est-à-dire :

$$\|\mathbf{s}(\tau)\|^2 = 1 \quad (2.9)$$

Bien que le seuil dans (2.8) diffère du seuil dans (2.3), nous choisissons de garder  $\epsilon$  pour désigner le seuil afin de ne pas alourdir les notations.

*Remarque :*  $\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{y}$  n'est autre que la sortie du filtre adapté au signal émis pris au retard  $\tau$  et à la fréquence  $f$ . En présence d'une cible ponctuelle en  $(\tau_0, f_0)$ ,  $|\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{y}|$  est caractérisé

par un lobe principal centré en  $\tau = \tau_0$  et  $f = f_0$  dont la largeur détermine la capacité à distinguer deux cibles proches. On parle alors de « résolution en distance » et de « résolution en fréquence ». Toutefois, lorsque la résolution en distance est supérieure à la dimension d'une cible, il n'est pas possible de distinguer les différents réflecteurs élémentaires et la cible est alors détectée comme une cible ponctuelle.

En radar, il est courant d'étudier les performances de détection du test (2.8), c'est-à-dire la PFA et la PD, lorsque  $\alpha$  est déterministe et lorsque  $\alpha$  est aléatoire. Ces deux cas correspondent respectivement aux modèles de Swerling 0 et Swerling I introduits au chapitre 1.

### 2.2.1.2 Performances de détection

Pour l'étude des performances de détection, on se place sur la case distance-Doppler où se situe la cible, c'est-à-dire pour  $\tau = \tau_0$  et  $f = f_0$ . Il s'agit alors de déterminer les distributions de  $\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}$  sous  $H_0$  et sous  $H_1$  afin d'obtenir les distributions de la variable de test  $\frac{|\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2}{\sigma^2}$  pour en déduire la PFA et la PD respectivement.

– sous l'hypothèse  $H_0$  :

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (2.10)$$

Dans ce cas, en tenant compte de (2.9), on a :

$$\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2) \quad (2.11)$$

où  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$  désigne la loi normale circulaire de variance  $\sigma^2$ .

– sous l'hypothèse  $H_1$  :

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} \quad (2.12)$$

En tenant compte de (2.9),  $\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} &= \alpha \mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{b} \\ &\stackrel{\|\mathbf{s}(\tau_0)\|^2=1}{=} \alpha + \mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour le modèle de Swerling 0,  $\alpha$  est déterministe inconnue. Dans ce cas,  $\mathbb{E}[\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}] = \alpha$  d'où :

$$\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\alpha, \sigma^2) \quad (2.14)$$

Pour le modèle de Swerling I,  $\alpha$  est une variable aléatoire vérifiant  $\alpha \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \gamma^2)$ . Dans ce cas :

$$\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2 + \gamma^2) \quad (2.15)$$

#### 2.2.1.2.1 Probabilité de fausse alarme (PFA)

La PFA est la probabilité que la variable de test  $\frac{|\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2}{\sigma^2}$  soit supérieure au seuil  $\epsilon$  sachant qu'il n'y a pas de cible :

$$\mathbb{P}_{FA} = \mathbb{P}_0 \left[ \frac{|\mathbf{s}^H(\tau_0) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2}{\sigma^2} > \epsilon \right] \quad (2.16)$$

où  $\mathbb{P}_0$  désigne la probabilité sous  $H_0$ .

Sous l'hypothèse  $H_0$ , d'après (2.11), la variable aléatoire  $\frac{2|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{y}|^2}{\sigma^2}$  est distribuée selon une loi du  $\chi^2$  à deux degrés de liberté dont la densité de probabilité  $p_{\chi^2,2}$  est définie par :

$$p_{\chi^2,2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

En développant (2.16), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{FA} &= \mathbb{P}_0 \left[ \frac{2|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{y}|^2}{\sigma^2} > 2\epsilon \right] \\ &\stackrel{(2.17)}{=} \int_{2\epsilon}^{+\infty} p_{\chi^2,2}(x) dx \\ &= \exp(-\epsilon) \end{aligned} \quad (2.18)$$

En pratique, on fixe une PFA pour déterminer le seuil en utilisant (2.18).

#### 2.2.1.2.2 Probabilité de détection (PD) pour le modèle de Swerling 0

La PD est la probabilité que la variable de test  $\frac{|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{y}|^2}{\sigma^2}$  soit supérieure au seuil  $\epsilon$  sachant qu'il y a présence d'une cible :

$$\mathbb{P}_D = \mathbb{P}_1 \left[ \frac{|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{y}|^2}{\sigma^2} > \epsilon \right] \quad (2.19)$$

où  $\mathbb{P}_1$  désigne la probabilité sous  $H_1$ .

Pour le modèle de Swerling 0, d'après (2.14), la variable aléatoire  $\frac{2|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{y}|^2}{\sigma^2}$  est distribuée selon une loi du  $\chi^2$  non centrée à deux degrés de liberté dont la densité de probabilité  $p_{\chi_{nc}^2,2}$  est définie par :

$$p_{\chi_{nc}^2,2}(x; a) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x+a}{2}\right) I_0(\sqrt{ax}) & x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

où le paramètre de non-centralité  $a$  est défini par :

$$a = \frac{2|\alpha|^2}{\sigma^2} \quad (2.21)$$

et  $I_0$  la fonction de Bessel modifiée de première espèce définie par la série entière :

$$I_0(\sqrt{ax}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!m!} \left(\frac{ax}{4}\right)^m \quad (2.22)$$

En développant (2.19), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_D &= \mathbb{P}_1 \left[ \frac{2|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{y}|^2}{\sigma^2} > 2\epsilon \right] \\ &= 1 - F_{\chi_{nc}^2,2} \left( 2\epsilon; \frac{2|\alpha|^2}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec  $F_{\chi_{nc}^2, 2}(x; \frac{2|\alpha|^2}{\sigma^2})$  la fonction de répartition de la loi du  $\chi^2$  à deux degrés de liberté de paramètre de non-centralité  $\frac{2|\alpha|^2}{\sigma^2}$ .

La PD peut également s'exprimer en fonction du RSB  $\eta$  défini par :

$$\eta = \frac{\mathbb{E}[|\alpha|^2]}{\mathbb{E}[|b(lT_s)|^2]} = \frac{|\alpha|^2}{\sigma^2} \quad (2.24)$$

Étant donné (2.18),  $\epsilon$  peut s'exprimer en fonction de la PFA. Dans ce cas, en tenant compte de la définition du RSB, la PD introduite en (2.23) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbb{P}_D = 1 - F_{\chi_{nc}^2, 2}(-2 \ln(\mathbb{P}_{FA}); 2\eta) \quad (2.25)$$

Sur la figure 2.1, on trace la PD en fonction du RSB  $\eta$  pour différentes valeurs de PFA.

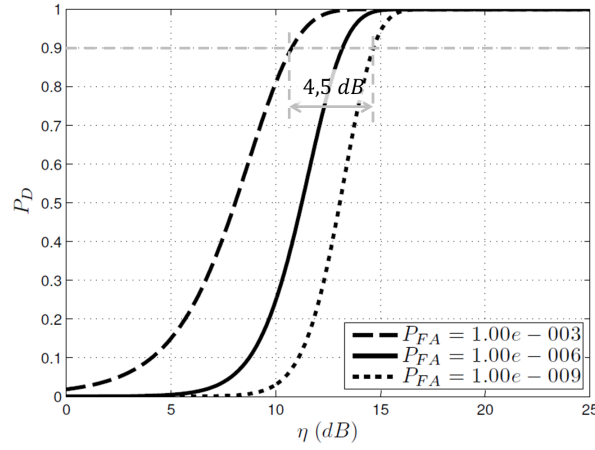


FIGURE 2.1 – PD en fonction du RSB pour le modèle de fluctuation Swerling 0 dans le cas de la détection d'une cible ponctuelle

D'après la figure 2.1, pour garantir  $\mathbb{P}_D = 0.9$  par exemple, il faut un gain en RSB de 4,5 dB pour que la PFA passe de  $10^{-3}$  à  $10^{-9}$ .

### 2.2.1.2.3 PD pour le modèle de Swerling I

On peut également évaluer la pertinence du test (2.8) dans un contexte où  $\alpha$  est une variable aléatoire gaussienne circulaire. On procède alors de la même manière que précédemment. Ainsi, sous l'hypothèse  $H_1$ , d'après (2.15), la variable aléatoire  $\frac{2|\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2}{\sigma^2 + \gamma^2}$  est distribuée selon une loi du  $\chi^2$  à deux degrés de liberté d'après (2.17), la PD vérifie alors :

$$\mathbb{P}_D = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2}\epsilon\right) \quad (2.26)$$

Sachant que le seuil  $\epsilon$  est égal à  $-\ln(\mathbb{P}_{FA})$  d'après (2.18), la PD peut s'écrire en fonction de la PFA comme suit :

$$\mathbb{P}_D = (\mathbb{P}_{FA})^{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2}} \quad (2.27)$$

A ce stade, on souhaite exprimer la PD en fonction du RSB. Pour cela, on rappelle que le RSB est défini par (2.24) et vaut ici :

$$\eta = \frac{\mathbb{E}[|\alpha|^2]}{\mathbb{E}[|b(lT_s)|^2]} = \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \quad (2.28)$$

Étant donné (2.28), la PD en fonction du RSB est alors donnée par :

$$\mathbb{P}_D = (\mathbb{P}_{FA})^{\frac{1}{1+\eta}} \quad (2.29)$$

On représente la PD en fonction du RSB et de la PFA sur la figure 2.2.

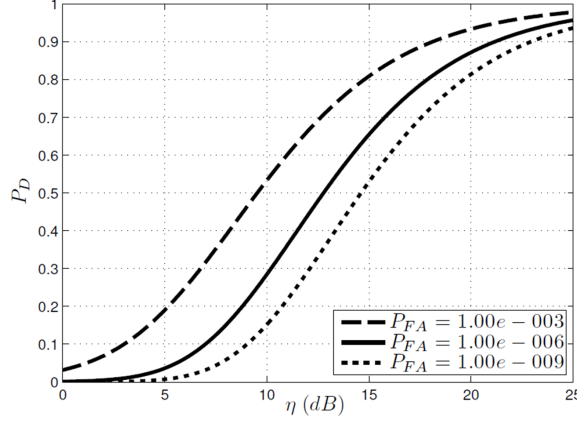


FIGURE 2.2 – PD en fonction du RSB pour le modèle de fluctuation Swerling I dans le cas de la détection d'une cible ponctuelle

Entre la figure 2.1 et la figure 2.2, on note que pour  $\mathbb{P}_{FA} = 10^{-3}$  par exemple, on atteint une PD de 0.9 pour un RSB de 11 dB pour le modèle de Swerling 0 alors qu'il faut un RSB de 18 dB pour le modèle de Swerling I.

### Bilan sur la détection d'une cible à un point brillant en présence de bruit thermique :

Nous avons étudié le GLRT pour le modèle de cible à un point brillant. Nous avons alors explicité la PFA et les PD pour les deux modèles de fluctuation du coefficient d'atténuation du signal reçu lorsque ce dernier est perturbé par un bruit blanc gaussien circulaire.

En pratique, pour la détection de cibles aériennes par un radar aéroporté, le modèle de Swerling I correspond à un cas réaliste alors que le modèle de Swerling 0 correspond à un cas idéal.

Après avoir étudié la détection d'une cible ponctuelle dans le cas où la perturbation est un bruit blanc gaussien circulaire, nous analysons le cas où le signal reçu est perturbé par du fouillis gaussien.

#### 2.2.2 Détection en présence de fouillis gaussien

Nous rappelons premièrement l'expression du signal reçu échantillonné pour un modèle de cible ponctuelle (2.1) :

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} + \mathbf{u} \quad (2.1)$$

où le vecteur  $\mathbf{b}$  contient la contribution du bruit thermique et  $\mathbf{u}$  la contribution du fouillis.

Comme évoqué dans la partie 1.5, certains types de fouillis présentent des propriétés de corrélation en terme de spectre Doppler. Ainsi, dans cette partie, nous considérons le cas où le vecteur

$\mathbf{b} + \mathbf{u}$  est distribué selon une loi gaussienne complexe multivariée de matrice de covariance  $\mathbf{M}$  vérifiant :

$$\mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{I}_L + \mathbf{\Gamma} \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{I}_L$  est la matrice identité de taille  $L \times L$  et  $\mathbf{\Gamma} = \mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}^H]$  est la matrice de covariance du fouillis.

Dans ce qui suit, nous rappelons le traitement de détection découlant du GLRT dans le cas où  $\mathbf{M}$  est supposée connue ; puis, nous analysons les performances de détection associées.

### a) Traitement de détection

Pour déterminer si le signal reçu contient un écho de cible ou non, nous procédons comme pour le cas précédent et les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  sont données par :

$$\begin{aligned} H_0 \text{ (absence d'une cible)} : \mathbf{y} &= \mathbf{b} + \mathbf{u} \\ H_1 \text{ (présence d'une cible)} : \mathbf{y} &= \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} + \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Lorsque le retard  $\tau_0$  et la fréquence Doppler  $f_0$  ne sont pas connus, on considère le modèle suivant pour les observations :

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau) + \mathbf{b} + \mathbf{u} \quad (2.32)$$

où le retard  $\tau$  et la fréquence Doppler  $f$  sont des variables déterminites inconnus.

Pour développer le GLRT, nous rappelons que les vraisemblances  $p_{H_0}$  et  $p_{H_1}$  sous les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  respectivement sont :

$$p_{H_0}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^L \det(\mathbf{M})} \exp(-\mathbf{y}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}) \quad (2.33)$$

et :

$$p_{H_1}(\mathbf{y}; \alpha) = \frac{1}{\pi^L \det(\mathbf{M})} \exp\left(-(\mathbf{y} - \alpha \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau))^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{y} - \alpha \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau))\right) \quad (2.34)$$

où *det* désigne le déterminant d'une matrice.

En procédant comme pour le cas précédent du bruit blanc gaussien, c'est-à-dire en prenant le logarithme du rapport de vraisemblance et en remplaçant  $\alpha$  par son estimée au sens du maximum de vraisemblance, on aboutit au test de détection suivant :

$$\frac{|\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}|^2}{\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau)} \leq \epsilon \quad (2.35)$$

Ce traitement est couramment appelé *adaptive matched filter* pour « filtre adapté adaptatif » ou encore *whitening matched filter* pour « filtre adapté blanchisseur » [ROB92]. Cette dernière appellation s'explique par le fait que le traitement (2.35) peut être décomposé en trois étapes :

- le blanchiment du signal reçu, décrite par l'opération  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}$  dans laquelle la combinaison fouillis et bruit thermique devient un bruit blanc par pré-multiplication du signal reçu par la matrice  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ ,
- le filtrage adapté au signal blanchi  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}$  par le filtre  $\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ ,
- l'opération de module au carré puis de normalisation par le terme  $\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_f \mathbf{s}(\tau)$ .

Étudions à présent la PFA et la PD associées à la statistique de test (2.35).

### b) Performances de détection

Pour les performances de détection, on se place en  $\tau = \tau_0$  et  $f = f_0$ .

Sous l'hypothèse  $H_0$ , le signal reçu ne contient que la perturbation  $\mathbf{b} + \mathbf{u}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{s}(\tau_0))$ . La statistique du test (2.35) est donc distribuée selon une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. On se retrouve dans le même cas que précédemment et la PFA est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{FA} &= \mathbb{P}_0 \left( \frac{|\mathbf{s}^H(\tau)\mathbf{D}_f^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}|^2}{\mathbf{s}^H(\tau)\mathbf{D}_f^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_f\mathbf{s}(\tau)} > \epsilon \right) \\ &= \exp(-\epsilon) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pour la PD, le raisonnement est analogue. Ainsi, sous l'hypothèse  $H_1$  et dans le cas du modèle de Swerling 0, on a :

$$\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\alpha\mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{s}(\tau_0), \mathbf{s}^H(\tau_0)\mathbf{D}_{f_0}^H\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{s}(\tau_0)) \quad (2.37)$$

En reprenant les développements du paragraphe 2.2.1.2.2, la PD peut s'écrire :

$$\mathbb{P}_D = 1 - F_{\chi_{nc,2}^2}(2\epsilon; 2|\alpha|^2) \quad (2.38)$$

Pour le modèle de Swerling I, le PD est donnée par :

$$\mathbb{P}_D = \exp\left(-\frac{1}{1+\gamma^2}\epsilon\right) \quad (2.39)$$

Le traitement de détection d'une cible ponctuelle en présence de fouillis gaussien nécessite la connaissance de la matrice de covariance  $\mathbf{M}$ . Celle-ci peut être estimée à partir de données réelles ou modélisée par une expression analytique donnée. Dans le premier cas, divers estimateurs sont proposés dans la littérature [KEL86, ROB92, GIN02, PAS05, BRE15] selon la distribution du fouillis considérée, voir par exemple [PAS08] pour une analyse de plusieurs estimateurs de la matrice de covariance d'un SIRV. Dans le second cas, on peut citer par exemple De Maio *et al.* [DE 09a] qui utilisent une modélisation AR du premier ordre.

Après avoir rappelé les tests de détection obtenus à partir du GLRT pour la détection d'une cible ponctuelle en présence de bruit gaussien circulaire, puis corrélé, nous étudions la détection d'une cible étendue en présence de bruit blanc gaussien circulaire. Concernant la détection d'une cible ponctuelle en présence de fouillis gaussien, nous y reviendrons au chapitre 3 pour l'optimisation de formes d'onde robustes au fouillis.

## 2.3 Détection d'une cible à multiples points brillants

Nous avons vu dans la section précédente 2.2.1.1 que pour une cible ponctuelle, le variable de test est égale au module au carré de la sortie du filtre adapté. En pratique, une cible est constituée



d'une infinité de réflecteurs élémentaires dont les contributions se combinent aboutissant ainsi au modèle à  $K$  réflecteurs. Lorsque le pas de résolution en distance du signal reçu après filtrage adapté est supérieur à la dimension de la cible, il n'est pas possible de distinguer ces différents réflecteurs et la cible apparaît comme un unique point brillant. Dans ce cadre, le détecteur introduit dans la section précédente 2.2 peut être qualifié de « détecteur basse résolution ». Lorsque le pas de résolution en distance est inférieur à la dimension de la cible, il est possible de distinguer les réflecteurs élémentaires. Un des intérêts de détecter ces réflecteurs est qu'ils caractérisent la cible et facilitent son identification. En pratique, une cible étendue sur un nombre  $Q$  de cases distance ne présente que quelques réflecteurs élémentaires [Li96]. Ainsi, dans cette section, nous étudions le cas général de la détection d'une (ou plusieurs) cible(s) constituée(s) de  $K$  points brillants<sup>13</sup> non-nécessairement consécutifs et répartis sur  $Q$  cases distance, Cf. Fig. 2.3.

Pour traiter de la détection de ce modèle de cible dans le cas où la perturbation est un bruit thermique distribué selon une loi normale circulaire de variance supposée connue, nous proposons premièrement de dresser un état de l'art sur les détecteurs existants. Dans un second temps, nous étudions le traitement de détection issu du GLRT développé sous certaines hypothèses que nous préciserons par la suite [ROU15b]. Nous analysons alors le détecteur obtenu en termes de performances de détection en nous fondant sur des résultats issus des statistiques d'ordre. Nous déduisons des approximations de la PFA, de la PD et de la probabilité de détection et de localisation (PDL). Enfin, nous effectuons une étude comparative avec les détecteurs présentés dans l'état de l'art.

### 2.3.1 Etat de l'art sur les détecteurs d'une cible étendue

Dans cet état de l'art, nous présentons plusieurs approches pour la détection d'une cible étendue en présence de bruit blanc gaussien circulaire. Pour cela, nous rappelons premièrement le modèle de signal reçu et introduisons quelques notations utiles pour les développements à venir.

Commençons par rappeler le modèle à  $K$  réflecteurs :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_{\tau_0, f_0} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} \quad (1.18)$$

avec :

$$\mathbf{X}_{\tau_0, f_0} = \mathbf{D}_{f_0} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(\tau_0^{(1)}) & \mathbf{s}(\tau_0^{(2)}) & \cdots & \mathbf{s}(\tau_0^{(K)}) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

où les vecteurs colonnes  $\mathbf{s}(\tau_0^{(k)})$ ,  $k = 1, \dots, K$  sont tels que :

$$\|\mathbf{s}(\tau_0^{(k)})\| = 1, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.40)$$

Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse que les retards  $\tau_0^{(1)}, \dots, \tau_0^{(K)}$  vérifient :

$$\tau_0^{(k)} = i_k^{(0)} \delta, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.41)$$

où  $\delta$  est la durée telle que  $c\delta/2$  est la largeur d'une case distance. Les indices  $i_1^{(0)}, \dots, i_K^{(0)}$  correspondent aux retards inconnus distincts, Cf. Fig. 2.3.

13. Dans ce scénario,  $K$  est le nombre total de points brillants, c'est-à-dire qu'il correspond au produit entre le nombre de cibles et le nombre de points brillants constituant chaque cible.

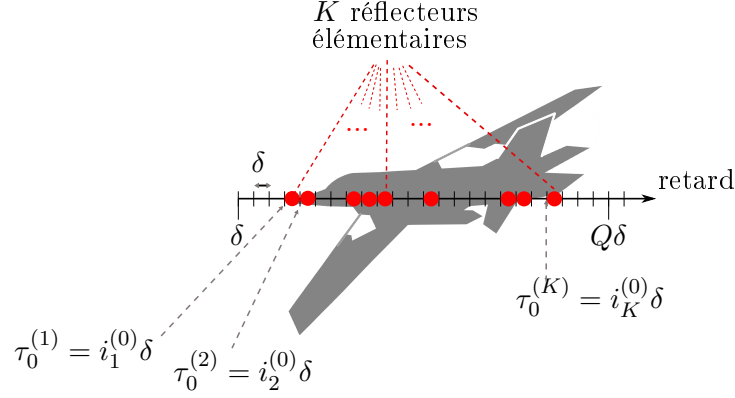


FIGURE 2.3 – Exemple de scénario avec une seule cible constituée de  $K$  points brillants répartis sur  $Q$  cases distances

Pour estimer les indices  $i_1^{(0)}, \dots, i_K^{(0)}$ , nous introduisons les variables  $i_1, \dots, i_K$ . Sachant que la cible est supposée répartie sur  $Q$  cases distance avec  $Q$  supposé connu, les indices inconnus  $i_1^{(0)}, \dots, i_K^{(0)}$  et les variables  $i_1, \dots, i_K$  sont compris dans l'intervalle  $\llbracket 1; Q \rrbracket$ . En supposant que la fréquence Doppler  $f_0$  est connue, le problème de détection de la cible à  $K$  réflecteurs se ramène à déterminer les  $K$  indices distincts  $i_1, \dots, i_K$ .

En posant  $\mathbf{i} = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_K]^T$ , on introduit alors la notation suivante :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i}} = \mathbf{X}_{\tau, f_0} = \mathbf{X}_{\mathbf{i}\delta, f_0} \quad (2.42)$$

Concernant le bruit additif  $\mathbf{b}$ , il vérifie :

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^H] = \sigma^2 \mathbf{I}_L \quad (2.43)$$

où la variance  $\sigma^2$  est supposée connue.

Disposant du modèle de signal reçu, les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  sont données par :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ H_1 &: \mathbf{y} = \mathbf{X}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  est supposé déterministe et inconnu.

Les approches qui traitent de la détection d'une cible étendue sont fondées sur le GLRT et diffèrent par les hypothèses prises sur les retards  $\mathbf{i}\delta$  ou sur la valeur de  $K$ . On aboutit alors à divers détecteurs parmi lesquels :

1. le détecteur dit « quadratique » [VAN71],
2. le détecteur nommé « K/Q » [SHN98],
3. le détecteur qualifié d'« optimal » [VAN71],
4. le détecteur appelé « SSD » pour *Spatial Scattering Density* [GER97],

Dans la suite et pour chacun de ces cas, on précise les hypothèses sur les indices  $i_1, \dots, i_K$  et sur  $K$ . Puis, on développe le rapport de vraisemblance et enfin, on caractérise le détecteur obtenu en termes de PFA et de PD.

### 2.3.1.1 Le détecteur « quadratique »

Le détecteur quadratique, également appelé « intégrateur », repose sur l'hypothèse que chaque case distance contient un réflecteur, c'est-à-dire  $K = Q$ . Dans ce cas, les positions des réflecteurs élémentaires ne sont pas à déterminer, c'est-à-dire :

$$\mathbf{i} = [1 \ 2 \ \dots \ Q]^T \quad (2.45)$$

Le logarithme du test du rapport de vraisemblance généralisé revient à tester :

$$\max_{\alpha} \frac{1}{\sigma^2} (\|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{X}_i \alpha\|^2) \leq \epsilon \quad (2.46)$$

En remplaçant  $\alpha$  par son estimée au sens du maximum de vraisemblance donnée par  $(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}$ , (2.46) devient :

$$\frac{1}{\sigma^2} (\|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2) \leq \epsilon \quad (2.47)$$

Sachant que  $\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H$  correspond au projecteur orthogonal de  $\mathbb{C}^L$  sur l'espace colonne de la matrice  $\mathbf{X}_i$  et que la différence  $\mathbf{y} - \mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}$  est le résidu de la projection orthogonale du vecteur  $\mathbf{y}$  sur cet espace colonne, (2.47) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \leq \epsilon \quad (2.48)$$

Pour s'affranchir du coût calculatoire engendré par l'inversion de la matrice  $\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i$ , il est courant en radar de se placer dans le régime asymptotique  $N \rightarrow +\infty$  tel que pour  $\mathbf{i}$  fixé, on a l'hypothèse suivante :

**Hypothèse.**

$$\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i = \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (2.49)$$

où l'on rappelle que  $N$  est l'entier tel que :

$$T = NT_s \quad (2.50)$$

L'hypothèse (2.49) revient à supposer qu'à  $B$  et  $T_s$  fixes, les signaux transmis sont décorrélés pour des durées  $NT_s$  suffisamment grandes, c'est-à-dire que l'élément de la ligne  $l$  et de la colonne  $m$  de la matrice  $\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i$  vérifie asymptotiquement :

$$\mathbf{s}^H(i_l \delta) \mathbf{s}(i_m \delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_l = i_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (2.51)$$

On démontre en annexe B.1 que cette hypothèse est vérifiée dans le cas où le signal émis est une impulsion modulée linéairement en fréquence et lorsque  $\delta = 1/B$ .

*Remarque :* Sachant que les vecteurs  $\mathbf{s}(k\delta)$ ,  $k = 1, \dots, Q$  de taille  $L$  contiennent les  $N$  échantillons du signal émis, faire tendre  $N$  vers l'infini sous-entend que  $L$  tend également vers l'infini.

Dans le régime asymptotique et à  $\mathbf{i}$  fixé, la statistique de test (2.48) vérifie alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1/2} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 + o(1) \quad \text{p.s.} \end{aligned} \quad (2.52)$$

où « p.s. » signifie « presque sûrement ».

Nous avons démontré en annexe B.2 que (2.52) est vérifiée lorsque  $s$  est une impulsion modulée linéairement en fréquence.

Dans (2.52), les  $Q$  composantes du vecteur  $\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}$  sont les  $Q$  sorties des filtres adaptés prises aux hypothèses de retard  $i_1\delta, \dots, i_Q\delta$  et en  $f = f_0$ . Asymptotiquement, ces  $Q$  variables vérifient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}^H(\delta) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{s}^H(Q\delta) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} \end{bmatrix} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_Q \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

où  $\xrightarrow{\mathcal{D}}$  désigne la convergence en distribution et où  $z_1, \dots, z_Q$  sont  $Q$  variables aléatoires indépendantes telles que :

- sous  $H_0$ ,  $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ ,
- sous  $H_1$ ,  $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\alpha, \sigma^2)$  pour le modèle de Swerling 0 et  $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2 + \gamma^2)$  pour le modèle de Swerling I.

La statistique de test (2.52) revient à sommer les énergies des signaux reçus après filtrage adapté dans les  $Q$  cases distance. Elle peut alors s'exprimer asymptotiquement comme suit :

$$\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} S_{quad} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{q=1}^Q |z_q|^2 \quad (2.54)$$

Pour la statistique de test  $S_{quad}$ , la PFA asymptotique est définie par :

$$\mathbb{P}_{FA,quad} = \mathbb{P}_0 [S_{quad} > \epsilon] \quad (2.55)$$

Sous  $H_0$ ,  $2S_{quad}$  est distribuée selon une loi du  $\chi^2$  à  $2Q$  degrés de liberté dont la fonction de répartition est  $F_{\chi^2, 2Q}(2\epsilon)$  :

$$\mathbb{P}_{FA,quad} = 1 - F_{\chi^2, 2Q}(2\epsilon) \quad (2.56)$$

Quant à la PD asymptotique, elle vérifie :

$$\mathbb{P}_{D,quad} = \mathbb{P}_1 [S_{quad} > \epsilon] \quad (2.57)$$

où le seuil  $\epsilon$  est fixé à partir de (2.56) pour une valeur donnée de PFA.

Sous  $H_1$ , dans le cas d'une cible dont les coefficients d'atténuation sont non-fluctuants, c'est-à-dire pour le modèle de Swerling 0,  $2S_{quad}$  est distribuée selon une loi du  $\chi^2$  non-centrée à  $2Q$  degrés de liberté dont la fonction de répartition est  $F_{\chi_{nc}^2, 2Q}(2\epsilon)$ . La PD asymptotique satisfait ainsi :

$$\mathbb{P}_{D,quad} = 1 - F_{\chi_{nc}^2, 2Q} \left( 2\epsilon, 2 \sum_{q=1}^Q \frac{|\alpha_q|^2}{\sigma^2} \right) \quad (2.58)$$

où  $2 \sum_{q=1}^Q \frac{|\alpha_q|^2}{\sigma^2}$  est le paramètre de non-centralité.

Dans le cas d'une cible dont les coefficients d'atténuation sont fluctuants selon le modèle de Swerling I, la variable  $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2} S_{quad}$  est distribuée selon une loi du  $\chi^2$  centrée à  $2Q$  degrés de liberté. La PD asymptotique vérifie alors :

$$\mathbb{P}_{D,quad} = 1 - F_{\chi^2, 2Q} \left( 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2} \epsilon \right) \quad (2.59)$$

On trace la PFA asymptotique et les PD asymptotiques sur la figure 2.4 pour  $Q = 15$ . Pour la PD, le seuil  $\epsilon$  est tel que  $\mathbb{P}_{FA,quad} = 10^{-3}$ . Le RSB est défini par (2.24) et (2.28) pour les modèles de Swerling 0 et Swerling I respectivement.

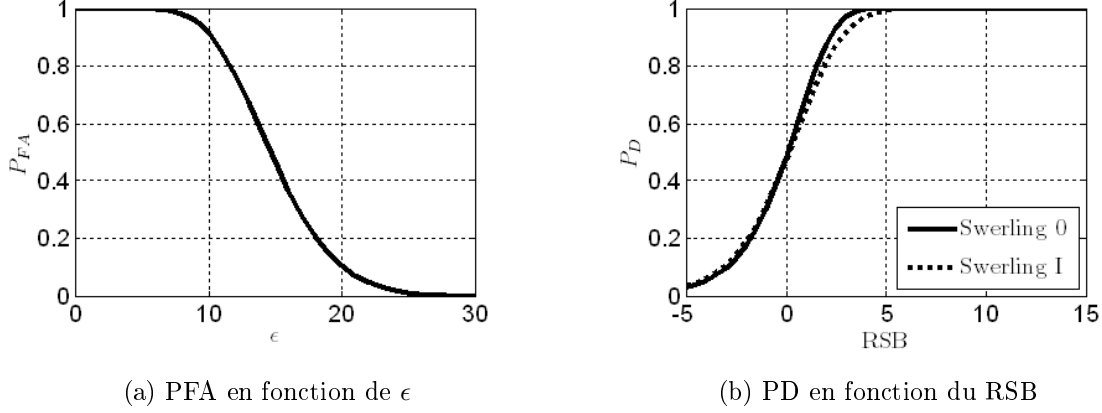


FIGURE 2.4 – PFA et PD du détecteur quadratique,  $Q = 15, K = Q$

En pratique, l'utilisateur fixe  $Q$  en fonction de la taille recherchée de la cible puis parcourt les cases distance par « groupe » de  $Q$  cases<sup>14</sup>. Enfin, il effectue une détection toutes les  $Q$  cases distance (Cf. figure 2.5).

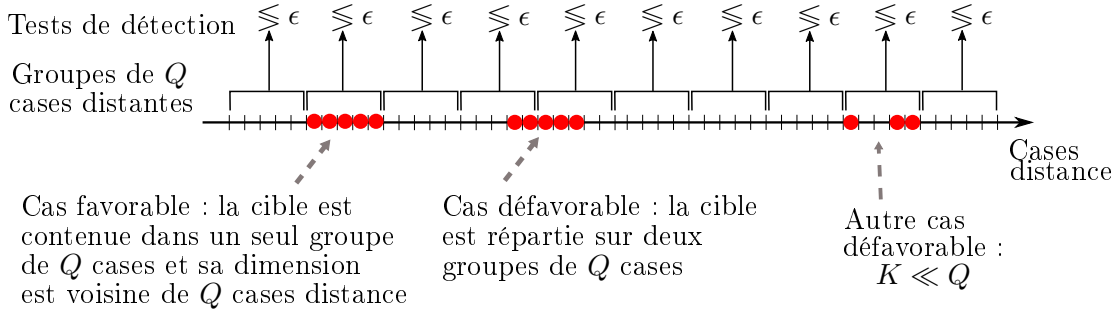


FIGURE 2.5 – Détecteur quadratique pour différentes configurations de cible

L'avantage du détecteur quadratique est sa simplicité de mise en œuvre. Toutefois, dans le cas où la cible se situe entre deux « groupes », le RSB dans chaque groupe est réduit par rapport au cas idéal où les  $Q$  réflecteurs sont exactement dans un groupe de  $Q$  cases, ce qui induit une réduction des performances de détection.

De plus, comme énoncé en introduction de cette section, une cible est constituée de  $K$  réflecteurs élémentaires principaux, ce qui conduit à plusieurs situations :

- $K \ll Q$ , il s'agit d'un cas défavorable puisque des cases contenant uniquement du bruit sont sommées dans  $S_{quad}$ . Le seuil étant suffisamment élevé pour détecter l'énergie rétrodiffusée par la cible dans l'ensemble des  $Q$  cases distance, cela entraîne des détections manquées,
- $K \approx Q$ , il s'agit d'un cas favorable puisque cela rejoint l'hypothèse de départ que les  $Q$  cases distance contiennent un réflecteur élémentaire.

14. Un recouvrement est parfois utilisé pour améliorer la détection.

A titre d'illustration, on trace la PD issue de la statistique de test  $S_{quad}$  dans le cas d'une cible avec  $K = 2$  réflecteurs répartis sur  $Q = 15$  cases distance. Pour le modèle de Swerling I par exemple, on note qu'entre la courbe de la figure 2.4b et celle de la figure 2.6, il faut un gain en RSB d'environ 11 dB pour atteindre une PD de 0,2.

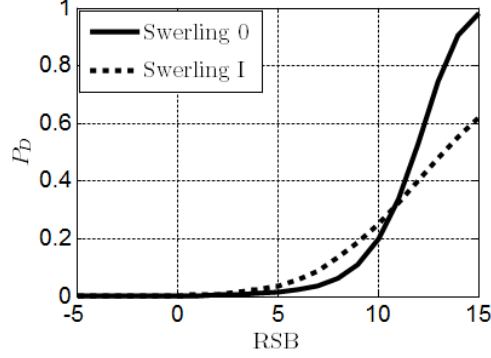


FIGURE 2.6 – PD du détecteur quadratique,  $Q = 15, K = 2$

D'autres détecteurs ont alors été proposés en considérant le modèle de cible à  $K$  points brillants répartis sur  $Q$  cases distance ; c'est le cas notamment des détecteurs présentés ci-après.

### 2.3.1.2 Le détecteur « K/Q »

Le détecteur «  $K$ -parmi- $Q$  », noté «  $K/Q$  », consiste à effectuer une détection pour chaque case distance et à décider la présence d'une cible lorsqu'au moins  $K$  réflecteurs sur  $Q$  cases sont détectés, où  $K$  est connu *a priori*. La détection sur chaque case distance revient à considérer chaque réflecteur comme une cible ponctuelle. En réutilisant les développements de la section 2.2, la PFA du détecteur  $K/Q$  vérifie asymptotiquement :

$$\mathbb{P}_0 \left( \text{card} \left\{ k : \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{s}^H(k\delta) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}\|^2 > \epsilon \right\} \geq K \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{FA} = \mathbb{P}_0 \left( \text{card} \left\{ k : \frac{1}{\sigma^2} |z_k|^2 > \epsilon \right\} \geq K \right) \quad (2.60)$$

où  $z_1, \dots, z_Q$  sont les variables aléatoires gaussiennes indépendantes définies au paragraphe 2.3.1.1 précédent.

La PFA asymptotique pour le détecteur  $K/Q$  est alors donnée par [GER95] :

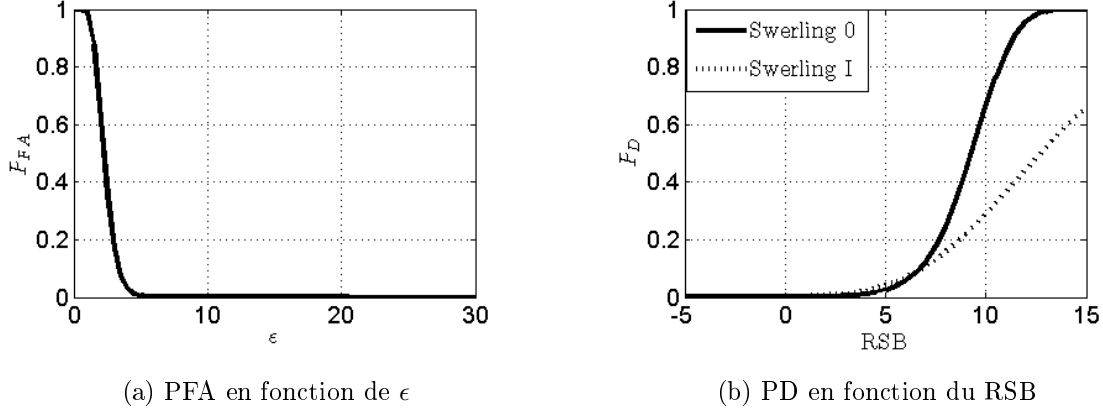
$$\mathbb{P}_{FA} = \sum_{q=K}^Q \binom{Q}{q} (\mathbb{P}_{FA, \text{ponct}})^q (1 - \mathbb{P}_{FA, \text{ponct}})^{Q-q} \quad (2.61)$$

où  $\mathbb{P}_{FA, \text{ponct}}$  désigne la PFA (2.18) pour une cible ponctuelle.

Quant à la PD asymptotique, en tenant compte du fait qu'une détection peut être issue soit d'une des  $K$  cases contenant un réflecteur, soit d'une des  $Q - K$  cases ne contenant que du bruit, elle vérifie :

$$\mathbb{P}_D = \sum_{q=K}^Q \sum_{n=0}^K \binom{K}{n} \binom{Q-K}{q-n} (\mathbb{P}_{D, \text{ponct}})^n (\mathbb{P}_{FA, \text{ponct}})^{q-n} (1 - \mathbb{P}_{D, \text{ponct}})^{K-n} (1 - \mathbb{P}_{FA, \text{ponct}})^{Q-K+n-q} \quad (2.62)$$

où  $\mathbb{P}_{D, \text{ponct}}$  est la PD d'une cible ponctuelle donnée par (2.23) pour le modèle de Swerling 0 et par (2.26) pour le modèle de Swerling I.


 FIGURE 2.7 – PFA et PD du détecteur  $K/Q$ ,  $Q = 15, K = 2$ 

On trace la PFA et les PD asymptotiques du détecteur  $K/Q$  sur la figure 2.7.

L'avantage du détecteur  $K/Q$  est sa simplicité de mise en œuvre. D'après les simulations effectuées par Hughes [HUG83], ce détecteur présente de meilleures performances de détection que celles du détecteur quadratique lorsque un des réflecteurs de la cible est prépondérant. Autrement dit, le détecteur  $K/Q$  est sensible à la configuration de la cible en termes de répartition et d'intensité des points brillants. De plus, pour des RSB faibles, on s'attend à une réduction des performances de détection par rapport au détecteur quadratique puisqu'il s'agit de détections individuelles.

Une alternative au détecteur  $K/Q$  est le détecteur dit « optimal » qui est issu du GLRT lorsque les retards  $i_1\delta, \dots, i_K\delta$  sont supposés équiprobables.

### 2.3.1.3 Le détecteur dit « optimal »

Ce détecteur est fondé sur le GLRT pour le modèle de cible à  $K$  points brillants sous l'hypothèse que les positions des points brillants sont équiprobables [VAN71]. Dans ce cas, en réutilisant le développement du GLRT pour le détecteur quadratique donné par (2.46)-(2.48), le rapport de vraisemblance pour une cible dont les coefficients fluctuent selon le modèle de Swerling 0 peut s'écrire comme suit :

$$S_{opt} = \frac{1}{\binom{Q}{K}} \sum_{\mathbf{i} \in \Omega_K} \exp \left( \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right) \quad (2.63)$$

avec  $\Omega_K$  l'ensemble des  $\binom{Q}{K}$  combinaisons possibles de  $K$  éléments distincts dans l'ensemble  $\{1, \dots, Q\}$  et  $\binom{Q}{K} = \frac{Q!}{K!(Q-K)!}$ .

En se plaçant en régime asymptotique et en utilisant l'approximation (2.49), (2.63) se simplifie de la manière suivante :

$$S_{opt} = \frac{1}{\binom{Q}{K}} \sum_{\mathbf{i} \in \Omega_K} \exp \left( \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right) + o(1) \\ \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \frac{1}{\binom{Q}{K}} \sum_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} \exp \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K |z_{i_k}|^2 \right) \quad (2.64)$$

avec  $z_1, \dots, z_Q$  les  $Q$  variables aléatoires gaussiennes indépendantes introduites au paragraphe 2.3.1.1.

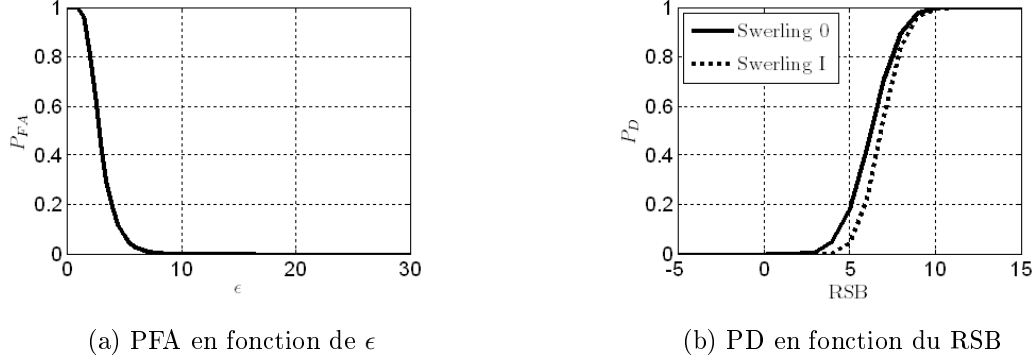


FIGURE 2.8 – PFA et PD du détecteur optimal,  $Q = 15, K = 2$

On note que lorsque  $K = Q$  dans (2.63), on retrouve le détecteur quadratique, c'est-à-dire  $\ln(S_{opt}) = S_{quad}$ .

En pratique, le détecteur dont la variable de test est (2.63) est difficilement utilisable à l'heure actuelle en temps réel car il faudrait tester les  $\binom{Q}{K}$  combinaisons possibles. En effet, sachant qu'une cible telle qu'un chasseur est constituée de 5 à 10 points brillants selon l'angle d'incidence de l'onde émise par le radar sur la cible, le nombre de combinaisons possibles pour  $Q = 20$  varie entre  $\binom{20}{5} = 15\,504$  et  $\binom{20}{10} = 184\,756$ .

Pour ce qui est de la PFA et de la PD, bien que nous ne disposons pas d'expressions analytiques, elles peuvent être obtenues empiriquement par simulations de Monte Carlo, Cf. Fig. 2.8. Pour une raison de coût calculatoire, nous avons pris  $Q = 15$  et  $K = 2$ . De plus, sachant qu'une fonction strictement croissante ne change pas le test, nous avons effectué les simulations avec  $\ln(S_{opt})$ .

*Remarque :* Bien que le détecteur issu du GLRT pour le modèle de cible à  $K$  réflecteurs répartis sur  $Q$  cases distance est donné par (2.63), c'est le détecteur quadratique qui est souvent implanté dans les radars actuels pour sa simplicité de mise en œuvre et sa complexité calculatoire plus faible. Dans [VAN71], Van Der Spek a étudié le cas de la détection d'une cible à  $K$  réflecteurs sur  $Q$  cases distance en utilisant le détecteur quadratique et a obtenu une expression analytique pour la PD [VAN71, eq. (10)]. L'utilisation du détecteur quadratique pour une cible à  $K$  points brillants est qualifiée de « sous-optimale » par Van De Spek puisqu'il ne s'agit pas du détecteur issu du GLRT. C'est par opposition à ce détecteur « sous-optimal » que Van Der Spek utilise l'appellation « détecteur optimal ».

Pour le détecteur quadratique, le détecteur  $K/Q$  et le détecteur optimal,  $K$  et  $Q$  sont des paramètres fixés *a priori* par l'utilisateur. En pratique, le paramètre  $Q$  est choisi en fonction de la taille recherchée de cible. Quant au paramètre  $K$ , il varie d'une cible à une autre. Pour pallier cette contrainte, Gerlach *et al.* [GER97] ont proposé un détecteur fondé sur le GLRT où le nombre  $K$  de réflecteurs est supposé aléatoire et distribué selon une distribution *a priori* : il s'agit du détecteur dit « SSD » pour *spatial scattering density*.



### 2.3.1.4 Le détecteur « SSD »

Le détecteur appelé « SSD » [GER97] suppose que chaque valeur possible de  $K$  se réalise avec une probabilité  $p_K$ . L'appellation *spatial scattering density*, qui signifie « densité spatiale des réflecteurs », traduit la répartition *a priori* des réflecteurs sur les  $Q$  cases distance.

En considérant le modèle de fluctuation de Swerling 0 pour  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ , en supposant qu'à  $K$  fixé, toutes les positions des réflecteurs sont équiprobables, et en se plaçant dans le régime asymptotique  $N \rightarrow +\infty$ , le test du rapport de vraisemblance généralisé s'écrit :

$$\sum_{K=1}^Q p_K \frac{1}{\binom{Q}{K}} \sum_{\mathbf{i} \in \Omega_K} \exp \left( \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y}\|^2 \right) \leq \epsilon \quad (2.65)$$

où la probabilité  $p_K$  est telle que :

$$p_K = c \binom{Q}{K} (1 - \xi)^{Q-K} \xi^K \quad K = 1, \dots, Q \quad (2.66)$$

avec  $c = [1 - (1 - \xi)^Q]^{-1}$  une constante de normalisation permettant d'avoir  $\sum_K p_K = 1$ , et  $\xi$  un paramètre fixé *a priori* qui contrôle la répartition des points brillants sur les  $Q$  cases distance.

Après développement, le test du rapport de vraisemblance généralisé (2.65) s'écrit comme suit [GER97] :

$$\sum_{K=1}^Q \ln \left[ 1 + \frac{\xi}{1 - \xi} \exp \left( \frac{|\mathbf{s}^H(K\delta) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2}{\sigma^2} \right) \right] \leq \epsilon \quad (2.67)$$

Cependant, Gerlach *et al.* ne donnent pas d'expressions analytiques des PFA et PD associées à ce détecteur. On trace donc les PFA et PD obtenues par simulations de Monte Carlo sur la figure 2.9.

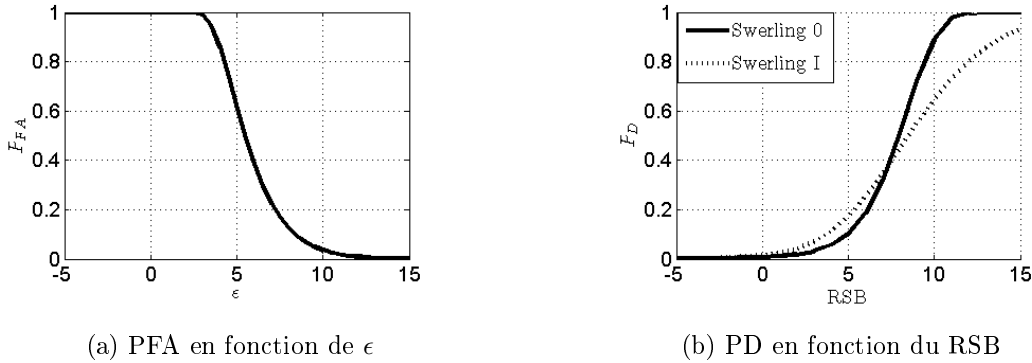


FIGURE 2.9 – PFA et PD du détecteur SSD,  $Q = 15$ ,  $K = 2$

Dans [GER97], au travers de simulations de Monte Carlo, l'auteur compare ce détecteur avec le détecteur quadratique et le détecteur  $K/Q$ . Les courbes de simulation de la PD en fonction du RSB montrent que ce détecteur réalise un compromis entre les deux autres détecteurs.

Bien que ce détecteur ne nécessite pas de connaître  $K$  *a priori*, il requiert de fixer un *a priori* sur la densité des réflecteurs. En d'autres termes, la valeur de  $\xi$  est déterminée par le nombre  $K_0$  attendu de réflecteurs.

### Bilan sur les détecteurs de cible étendue

Parmi les détecteurs présentés, le détecteur quadratique et le détecteur SSD conduisent à la décision quant à la présence ou l'absence d'une cible, mais ils ne permettent pas de déterminer la position des réflecteurs élémentaires. Dans le cadre de cette thèse, il ne s'agit pas uniquement de détecter la cible, mais de proposer une solution facilitant son identification à partir de son profil distance<sup>15</sup>. Le détecteur  $K/Q$  permet de le faire, mais présente une sensibilité à la configuration inconnue de la cible.

Ainsi, dans la suite, nous analysons un GLRT pour la détection de  $K$  réflecteurs répartis sur  $Q$  cases distance en intégrant la localisation de ces  $K$  réflecteurs élémentaires. En supposant que  $K$ ,  $Q$  et  $\sigma^2$  sont connus *a priori*, notre première contribution consiste à caractériser le détecteur obtenu en termes de PFA et de PD. De plus, nous analysons la « probabilité de détection et de localisation » (PDL) prenant en compte conjointement les détections et localisations correctes des réflecteurs.

Dans la prochaine section, nous détaillons premièrement les différentes étapes qui permettent d'aboutir à une expression du test pour le scénario proposé. Nous donnons alors des approximations des PFA, PD et PDL associées au test obtenu. Enfin, nous menons une étude comparative avec le détecteur quadratique, le détecteur  $K/Q$  et le détecteur SSD en nous fondant sur la PD.

#### 2.3.2 Contribution : étude d'un GLRT pour la détection d'une cible composée de $K$ points brillants non nécessairement consécutifs

Dans cette partie, nous développons premièrement le GLRT pour une cible à  $K$  réflecteurs élémentaires réparties sur  $Q$  cases distance sous l'hypothèse que  $K$  et  $Q$  sont connus et que les positions des réflecteurs sont déterministes et inconnues. Dans un second temps, nous caractérisons le détecteur obtenu en termes de PFA, PD et PDL.

##### 2.3.2.1 Traitement de détection

Nous reprenons les hypothèses introduites au paragraphe 2.3.1 sur l'état de l'art des différents détecteurs :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ H_1 &: \mathbf{y} = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.68)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $i_1^{(0)} \dots i_K^{(0)}$  sont supposés déterministes et inconnus et  $\mathbf{b}$  contient les échantillons de bruit thermique de variance  $\sigma^2$  supposée connue.

En estimant  $\boldsymbol{\alpha}$  au sens du maximum de vraisemblance et à partir des développements (2.46)-(2.48) détaillés au paragraphe 2.3.1.1, le test du rapport de vraisemblance généralisé s'écrit :

$$S_N = \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\mathbf{i} \in \Omega_K} \|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right) \leq \epsilon \quad (2.69)$$

En pratique, le coût calculatoire de la variable  $S_N$  peut être élevé puisqu'il faut calculer  $\|\mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$  pour  $\binom{Q}{K}$  vecteurs  $\mathbf{i}$  différents, ce qui correspond à 15 504 vecteurs  $\mathbf{i}$  différents pour  $Q = 20$  et  $K = 5$ . De plus, à cause de la maximisation de  $S_N$  sur  $\mathbf{i}$  dans (2.69), il

---

15. Cela revient à déterminer les positions et amplitudes des réflecteurs élémentaires.

n'y a pas nécessairement indépendance des variables aléatoires  $\|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$  associées à des vecteurs  $\mathbf{i}$  différents. Par la suite, nous verrons que les développements mathématiques mis en œuvre pour obtenir une expression analytique de la PFA s'appuient sur l'indépendance des variables aléatoires  $\|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$  pour toutes les valeurs de  $\mathbf{i}$ .

Ainsi, de manière identique au paragraphe 2.3.1.1, nous choisissons de nous placer dans le régime asymptotique  $N \rightarrow +\infty$  pour lequel à  $\mathbf{i}$ ,  $B$  et  $T_s$  fixés, on a :

$$\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i = \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (2.49)$$

De plus, sous  $H_0$ , on a :

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^L}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_L) \quad (2.70)$$

et sous  $H_1$ , on considère le modèle de Swerling I pour les coefficients d'atténuation :

$$\boldsymbol{\alpha} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^L}(0, \gamma^2 \mathbf{I}_K) \quad (2.71)$$

Nous prenons la même variance  $\gamma^2$  pour  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$  afin de présenter des expressions simples pour les PD et PDL. Dans ce cas :

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, (\sigma^2 + \gamma^2) \mathbf{I}_L) \quad (2.72)$$

En combinant l'hypothèse de décorrélation et le fait que  $\mathbf{y}$  est distribuée selon une loi normale gaussienne circulaire, on montre en annexe B.2 dans le cas où le signal émis est une impulsion modulée linéairement en fréquence que l'on a :

$$S_N = \frac{2}{\sigma^2} \max_{\mathbf{i} \in \Omega_K} \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 + o(1) \quad \text{p.s.} \quad (2.73)$$

On rappelle que dans (2.73), les composantes du vecteur  $\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}$  sont les sorties des filtres adaptés prises aux hypothèses de retard  $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(K)}$  et en  $f = f_0$ . Ainsi, parmi les  $Q$  cases distance contenant les énergies du signal reçu après filtrage adapté aux instants  $\delta, \dots, Q\delta$ , c'est-à-dire parmi  $|\mathbf{s}^H(\delta) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(Q\delta) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y}|^2$ ,  $S_N$  consiste à sommer les  $K$  plus fortes énergies. Le coût calculatoire de (2.73) est réduit par rapport à (2.69) puisqu'il n'y a plus d'inversion de matrice à calculer. En pratique, on approxime (2.69) par (2.73). De plus, on note que lorsque  $K = Q$ , on retrouve le détecteur quadratique.

Dans la suite, on fait référence à la statistique de test (2.73) par l'appellation « somme-des- $K$ -max ». Dans [VAN71], Van Der Spek a comparé le détecteur somme-des- $K$ -max au détecteur quadratique pour différentes valeurs de  $K$  et de  $Q$  fixées *a priori* à partir de simulations de Monte Carlo. Plus récemment dans [LON12], les auteurs ont également étudié le détecteur somme-des- $K$ -max où  $K$  est estimé à partir de la minimisation du critère d'information d'Akaike. Dans ce cadre, ils proposent d'exprimer le seuil de détection à partir de la fonction de répartition inverse d'une loi Gamma pour une valeur de PFA donnée. Ils obtiennent ensuite la PD par simulation de Monte Carlo. Notre contribution, qui s'inscrit en complément des travaux de [LON12], porte quant à elle, sur l'établissement des performances de détection de la statistique de test somme-des- $K$ -max lorsque  $K$  est supposé défini *a priori*.

Aussi, nous étudions la PFA, la PD et la PDL dans le régime asymptotique précédent en nous fondant sur la statistique de test (2.73).

### 2.3.2.2 Performances de détection

Pour obtenir les performances de détection, c'est-à-dire la PFA, la PD puis la PDL, il faut déterminer la distribution de  $S_N$  sous les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ . Pour cela, en supposant que sous  $H_1$ , la cible est située sur les  $K$  premières cases distance sans perte de généralité, nous avons démontré la propriété suivante :

**Propriété 1.**

$$S_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} S = \frac{2}{\sigma^2} \max_{\mathbf{i} \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 \quad (2.74)$$

où  $z_1, \dots, z_Q$  sont  $Q$  variables aléatoires indépendantes telles que :

- en l'absence de cible :  $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ ,
- en présence de cible :  $z_1, \dots, z_K \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \gamma^2 + \sigma^2)$  et  $z_{K+1}, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$

La démonstration de la propriété 1 est donnée en annexe B.2 lorsque  $s$  vérifie l'hypothèse de décorrélation en  $O(1/N)$ . On note que l'hypothèse que la cible est sur les  $K$  premières cases distance permet de distinguer les variables gaussiennes  $z_k$  qui sont de variance  $\sigma^2 + \gamma^2$  et celles qui sont de variance  $\sigma^2$ .

Dans la suite, en se plaçant dans le régime asymptotique  $N \rightarrow +\infty$ , nous montrons comment obtenir des approximations des PFA, PD et PDL de  $S_N$  à partir des PFA, PD et PDL de  $S$ .

#### 2.3.2.2.1 Expression analytique de la PFA asymptotique

A partir de (2.74), la PFA dont on cherche l'expression est donnée par :

$$\mathbb{P}_{FA} = \mathbb{P}_0(S > \epsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0(S_N > \epsilon) \quad (2.75)$$

Dans ce qui suit, nous faisons référence à (2.75) par l'appellation « PFA asymptotique ».

Pour obtenir la distribution de  $S$  et en déduire une expression de la PFA asymptotique donnée en (2.75), nous devons déterminer la distribution du maximum d'une somme de variables aléatoires i.i.d. selon une loi du  $\chi^2$ . Pour s'affranchir du maximum et obtenir la distribution de  $S$ , nous proposons d'utiliser les statistiques d'ordre [BAL06]. Pour cela, on introduit le conditionnement de l'événement  $\{S > \epsilon\}$  à l'ensemble des  $Q!$  permutations de l'événement des variables ordonnées  $\{|z_{i_1}|^2 > |z_{i_2}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\}$ . L'objectif est de tirer profit de raisonnements connus sur les distributions des variables aléatoires ordonnées afin d'aboutir à la distribution de  $S$ . La PFA asymptotique (2.75) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(S > \epsilon) &= \mathbb{P}_0\left(\frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 > \epsilon\right) \\ &= \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \mathbb{P}_0\left(\left\{\frac{2}{\sigma^2} (|z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2) > \epsilon\right\} \cap \{|z_{i_1}|^2 > |z_{i_2}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\}\right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

avec  $\Omega_Q$  l'ensemble des  $Q!$  permutations de  $\{1, \dots, Q\}$ .

Au travers du changement de variable défini par :

$$\Delta_{i_q} = \begin{cases} q(|z_{i_q}|^2 - |z_{i_{q+1}}|^2) & q = 1, \dots, K \\ K(|z_{i_q}|^2 - |z_{i_{q+1}}|^2) & q = K+1, \dots, Q-1 \\ K|z_{i_q}|^2 & q = Q \end{cases} \quad (2.77)$$

nous avons montré en annexe B.3 que la probabilité (2.76) peut s'écrire en fonction des  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$ . Nous présentons le résultat de ce développement dans le lemme suivant portant sur la distribution d'une somme de variables exponentielles ordonnées :

**Lemme 1.** *Soient  $Q$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_Q$  indépendantes et distribuées selon des lois exponentielles de paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$ . Soient  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(Q)}$  les variables aléatoires ordonnées telles que  $X_{(1)} > X_{(2)} > \dots > X_{(Q)}$ .*

Alors :

$$\mathbb{P}(X_{(1)} + \dots + X_{(K)} > \epsilon) = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q}}{\lambda_{i_1}(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) \dots (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q})} \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \quad (2.78)$$

où  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  sont  $Q$  variables aléatoires indépendantes et distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\theta_{i_q}, q = 1, \dots, Q$  définis par :

$$\theta_{i_q} = \begin{cases} \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{q} & q = 1, \dots, K \\ \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q}}{K} & q = K + 1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.79)$$

Pour obtenir une expression de la PFA asymptotique, nous utilisons le résultat du lemme 1 et nous procédons en trois étapes :

1. nous appliquons le lemme 1 afin d'obtenir une expression de la PFA asymptotique en fonction des variables aléatoires  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  ;
2. puis, nous explicitons la densité de probabilité de la variable  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  pour toutes les valeurs de  $[i_1, \dots, i_Q]$  dans  $\Omega_Q$  ;
3. enfin, l'expression analytique de la PFA asymptotique s'obtient en calculant la fonction de répartition de  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  et en insérant ce résultat dans l'expression (2.78) du lemme 1.

Pour la première étape, on note que sous l'hypothèse  $H_0$ , les variables aléatoires  $\frac{2}{\sigma^2}|z_k|^2, k = 1, \dots, Q$  sont identiquement distribuées selon une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté dont la densité de probabilité est également une loi exponentielle de paramètre  $1/2$ . De plus, d'après la propriété 1, les variables  $\frac{2}{\sigma^2}|z_1|^2, \dots, \frac{2}{\sigma^2}|z_Q|^2$  sont indépendantes. Dans ce cas, on peut appliquer le lemme 1 aux variables

$$X_1 = \frac{2}{\sigma^2}|z_1|^2, \dots, X_Q = \frac{2}{\sigma^2}|z_Q|^2$$

avec :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_Q = 1/2 \quad (2.80)$$

D'après (2.78), la probabilité (2.76) peut s'écrire :

$$\mathbb{P}_0 \left( \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 > \epsilon \right) = \frac{1}{Q!} \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \quad (2.81)$$

où les variables  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  sont distribuées selon des lois exponentielles de paramètres  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  tels que :

$$\theta_{i_q} = \begin{cases} \frac{1}{2} & q = 1, \dots, K \\ \frac{q}{2K} & q = K + 1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.82)$$

Sachant que les  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  ne dépendent plus des permutations  $i_1, \dots, i_Q$ , les variables  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  non plus et (2.81) peut se simplifier comme suit :

$$\mathbb{P}_0 \left( \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 > \epsilon \right) = \mathbb{P}(\Delta_1 + \dots + \Delta_Q > \epsilon) \quad (2.83)$$

L'intérêt d'avoir abouti à (2.83) est double :

- nous avons réduit le nombre de probabilités à calculer. Au lieu des  $Q!$  probabilités relatives aux  $Q!$  combinaisons de l'ensemble  $\{1, \dots, Q\}$ , une seule probabilité doit être déterminée ;
- nous avons exprimé la PFA en fonction de la somme  $\Delta_1 + \dots + \Delta_Q$  où la distribution de chaque variable aléatoire  $\Delta_1, \dots, \Delta_Q$  est connue. De ce fait, nous nous sommes affranchis du maximum présent dans la variable  $S$ .

A présent, il reste à obtenir la densité de probabilité de la somme  $\Delta_1 + \dots + \Delta_Q$  puis sa fonction de répartition.

Pour la deuxième étape, la densité de probabilité de la somme  $\Delta_1 + \dots + \Delta_Q$  est obtenue à partir du lemme suivant :

**Lemme 2.** Soient  $Q$  variables aléatoires indépendantes notées  $Z_1, \dots, Z_Q$  telles que  $Z_1, \dots, Z_K$  sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\phi_0$  et  $Z_{K+1}, \dots, Z_Q$  sont distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\phi_1, \dots, \phi_{Q-K}$  avec  $\phi_1, \dots, \phi_{Q-K}$  tous différents.

Dans ce cas :

- la somme  $S_1 = Z_1 + \dots + Z_K$  est distribuée selon une loi Gamma de paramètres  $K$  et  $\phi_0$  ;
- la somme  $S_2 = Z_{K+1} + \dots + Z_Q$  est distribuée selon une loi Hypo-exponentielle<sup>16</sup>.

La densité de probabilité de la somme  $S = S_1 + S_2$  est alors donnée par :

$$p_S(y) = \begin{cases} \frac{\mu(\phi_0)^K}{(K-1)!} \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q,Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \exp((- \phi_q)y) p_\gamma((\phi_0 - \phi_q)y; K) & y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.84)$$

où  $p_\gamma$  est la fonction Gamma incomplète inférieure<sup>17</sup>, et  $\mu$  et  $\beta_{q,Q-K}$  sont définis par :

$$\mu = \prod_{j=1}^{Q-K} \phi_j \quad (2.86)$$

16. Soient  $Q$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_Q$  indépendantes telles que  $X_1 \sim \text{Exp}(\phi_1), \dots, X_Q \sim \text{Exp}(\phi_Q)$  avec  $\phi_1, \dots, \phi_Q$  tous distincts. La loi de la variable  $X_1 + \dots + X_Q$  est appelée loi « Hypo-exponentielle » et sa densité de probabilité  $p_{\text{hypoExp}}$  est définie par (Cf. annexe A) :

$$p_{\text{hypoExp}}(x) = \sum_{q=1}^Q \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^Q \frac{\phi_j}{\phi_j - \phi_q} \phi_q \exp(-\phi_q x), \quad x \geq 0$$

17. La loi Gamma incomplète inférieure  $p_\gamma$  de paramètre  $a \in \mathbb{R}$  définie par (Cf. annexe A) :

$$p_\gamma(y; a) = \int_0^y x^{a-1} \exp(-x) dx \quad (2.85)$$

et :

$$\beta_{q,Q-K} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{Q-K} \frac{1}{\phi_j - \phi_q} \quad (2.87)$$

Le lemme 2 s'obtient en convoluant les densités de probabilité d'une loi Gamma et d'une loi Hypo-exponentielle comme démontré en annexe B.4.

On applique ce lemme avec :

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \quad (2.88)$$

et :

$$\phi_q = \frac{K+q}{2K}, \quad q = 1, \dots, Q-K \quad (2.89)$$

Dans ce cas, les paramètres  $\mu$  et  $\beta_{q,Q-K}$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(K+1)(K+2)\dots Q}{(2K)^{Q-K}} \\ &= \frac{Q!}{K!(2K)^{Q-K}} \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \beta_{q,Q-K} &= (2K)^{Q-K-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{Q-K} \frac{1}{j-q} \\ &= (2K)^{Q-K-1} \frac{(-1)^{q-1}}{(Q-K-q)!(q-1)!} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Remarque : Pour  $Q = 1$ , on pose  $\beta_{1,1} = 1$ . De plus,  $Q = 1$  implique que  $K = 1$ . Dans ce cas, la densité de probabilité de  $S_2$  se réduit à la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

En incluant (2.90) et (2.91) dans (2.84), on obtient la densité de  $S$ .

La troisième étape pour obtenir la PFA asymptotique (2.83) consiste à intégrer la densité de probabilité  $p_S$  de  $\epsilon$  à  $+\infty$ . La PFA s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0 \left( \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 > \epsilon \right) &= \mathbb{P}_0 \left( \{\Delta_1 + \dots + \Delta_Q > \epsilon\} \right) \\ &= \int_{\epsilon}^{+\infty} p_S(y) dy \\ &= 1 - \int_0^{\epsilon} p_S(y) dy \\ &= 1 - \frac{\mu(\phi_0)^K}{(K-1)!} \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q,Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \int_0^{\epsilon} \exp((- \phi_q)y) p_{\gamma}((\phi_0 - \phi_q)y; K) dy \end{aligned} \quad (2.92)$$

Lorsque le paramètre de la fonction Gamma incomplète inférieure est un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{\gamma}$  vérifie [GRA07, §8.351] :

$$p_{\gamma}(y; n) = (n-1)! \left( 1 - \exp(-y) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{y^m}{m!} \right) \quad (2.93)$$

De (2.93), on en déduit :

$$\int_0^\epsilon \exp((- \phi_q) y) p_\gamma((\phi_0 - \phi_q)y; K) dy = (K-1)! \left[ \int_0^\epsilon \exp((- \phi_q) y) dy - \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(\phi_0 - \phi_q)^m}{m!} \int_0^\epsilon \exp(-\phi_0 y) y^m dy \right] \quad (2.94)$$

Dans (2.94), la seconde intégrale peut s'écrire à partir de la fonction  $p_\gamma$  comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \exp(-\phi_0 y) y^m dy &= \int_0^{\phi_0 \epsilon} \exp(-t) \left( \frac{t}{\phi_0} \right)^m \frac{dt}{\phi_0} \\ &= \frac{1}{(\phi_0)^{m+1}} p_\gamma(\phi_0 \epsilon; m+1) \end{aligned} \quad (2.95)$$

En intégrant (2.95) dans (2.94), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \exp((- \phi_q) y) p_\gamma((\phi_0 - \phi_q)y; K) dy &= (K-1)! \left[ \frac{1 - \exp((- \phi_q) \epsilon)}{\phi_q} - \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(\phi_0 - \phi_q)^m}{m!} \frac{1}{(\phi_0)^{m+1}} p_\gamma(\phi_0 \epsilon; m+1) \right] \end{aligned} \quad (2.96)$$

En prenant en compte (2.96) dans (2.92) et en simplifiant par le terme  $(K-1)!$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\Delta_1 + \dots + \Delta_Q > \epsilon) \\ = 1 - \mu(\phi_0)^K \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q,Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \left( \frac{1 - \exp(-\phi_q \epsilon)}{\phi_q} - \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(\phi_0 - \phi_q)^m}{m! (\phi_0)^{m+1}} p_\gamma(\phi_0 \epsilon; m+1) \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Dans (2.97), on vérifie que lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, la PFA asymptotique tend vers un.

Après avoir obtenu une expression analytique de la PFA asymptotique, nous analysons le cas de la PD asymptotique.

### 2.3.2.2.2 Expression analytique de la PD asymptotique

On cherche une expression de la PD asymptotique définie par :

$$\mathbb{P}_D = \mathbb{P}_1(S > \epsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_1(S_N > \epsilon) \quad (2.98)$$

où l'on rappelle que la statistique de test  $S$  est définie par :

$$S = \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 \quad (2.74)$$

avec  $z_1, \dots, z_Q$  les  $Q$  variables aléatoires indépendantes telles que  $z_1, \dots, z_K \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \gamma^2 + \sigma^2)$  et  $z_{K+1}, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ , Cf. propriété 1.

Pour obtenir une expression analytique de la PD asymptotique, nous procédons comme pour le développement de l'expression de la PFA asymptotique, c'est-à-dire que nous commençons par conditionner la probabilité (2.98) par l'événement  $\{|z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\}$  :



$$\mathbb{P}_1 \left( \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 > \epsilon \right) = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \mathbb{P}_1 \left( \left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_Q}|^2) > \epsilon \right\} \cap \{|z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\} \right) \quad (2.99)$$

A partir de (2.99), on applique le lemme 1 aux variables

$$X_1 = \frac{2}{\sigma^2} |z_{i_1}|^2, \dots, X_Q = \frac{2}{\sigma^2} |z_{i_Q}|^2$$

afin d'obtenir la fonction de répartition de la somme de  $K$  variables aléatoires ordonnées. Pour cela, on note  $\rho$  le rapport suivant :

$$\rho = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2} \quad (2.100)$$

et on rappelle que la cible est contenue dans les  $K$  premières cases distance, c'est-à-dire que les variables  $\frac{2}{\sigma^2} |z_1|^2, \dots, \frac{2}{\sigma^2} |z_K|^2$  sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\frac{\rho}{2}$  et les variables  $\frac{2}{\sigma^2} |z_{K+1}|^2, \dots, \frac{2}{\sigma^2} |z_Q|^2$  sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ . Dans ce cas, d'après le lemme 1, la PD asymptotique est donnée par (2.78) :

$$\mathbb{P}_1 \left( \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 > \epsilon \right) = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q}}{\lambda_{i_1} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) \dots (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q})} \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \quad (2.78)$$

avec :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_K = \frac{\rho}{2} \quad (2.101)$$

et

$$\lambda_{K+1} = \dots = \lambda_Q = \frac{1}{2} \quad (2.102)$$

Les variables aléatoires  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  sont distribuées selon des lois exponentielles de paramètres  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  donnés par (2.82) :

$$\theta_{i_q} = \begin{cases} \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{q} & q = 1, \dots, K \\ \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{K} & q = K + 1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.82)$$

Comme énoncé dans le lemme 1, la somme de variables aléatoires distribuées selon des lois exponentielles de paramètres identiques est une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma. Lorsque les paramètres des lois exponentielles sont tous différents, alors la somme est une variable aléatoire distribuée selon une loi Hypo-exponentielle. Ainsi, pour obtenir la distribution de  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  et en déduire sa fonction de répartition, il suffit de savoir si les paramètres  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  sont identiques ou différents pour chaque permutation  $[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q$  puis de convoluer une loi Hypo-exponentielle avec une loi Gamma ou une somme de loi Gamma.

Toutefois, contrairement au cas de la PFA, les variables  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  ne sont pas indépendantes de la permutation  $i_1, \dots, i_Q$ . Dans certains cas,  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  est distribuée selon la somme d'une

loi Hypo-exponentielle et d'une loi Gamma, mais on peut également avoir la configuration où  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  est distribuée selon la somme d'une loi Hypo-exponentielle et d'une somme de lois Gamma de paramètres différents. A titre d'illustration de ce second cas, considérons le scénario suivant :

$$i_1 = K + 1, i_2 = K + 2, i_3 = 3, i_4 = 4, i_5 = K + 3, i_6 = K + 4, i_7 = 7, \dots, i_K = K$$

Il s'agit du scénario où les énergies de 4 cases « bruit » sont supérieures aux énergies de 4 cases « signal+bruit ». D'après (2.82), on a alors  $\theta_{i_1} = \frac{1}{2}, \theta_{i_2} = \frac{1}{2}, \theta_{i_3} = \frac{\rho+2}{6}, \theta_{i_4} = \frac{2\rho+2}{8}, \theta_{i_5} = \frac{2\rho+3}{10}, \theta_{i_6} = \frac{\rho+2}{6}$ . Dans ce cas, la somme  $\Delta_{i_1} + \Delta_{i_2}$  est distribuée selon une loi Gamma de paramètres  $(2, \frac{1}{2})$ , la somme  $\Delta_{i_3} + \Delta_{i_6}$  est distribuée selon une loi Gamma de paramètres  $(2, \frac{\rho+2}{6})$  et la somme  $\Delta_{i_4} + \Delta_{i_5} + \Delta_{i_7} + \dots + \Delta_{i_Q}$  est distribuée selon une loi Hypo-exponentielle.

Ainsi, pour aboutir à une expression de la PD asymptotique, il faut étudier les  $Q!$  permutations. Pour certaines de ces permutations, on peut utiliser le résultat du lemme 2 pour obtenir la distribution de la somme  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  alors que pour d'autres permutations, il faut connaître la distribution d'une somme de variables aléatoires distribuées selon des lois Gamma de paramètres différents. Sachant qu'il n'existe pas à notre connaissance d'expression tractable pour cette convolution multiple, nous évaluons la PD asymptotique par simulations de Monte-Carlo où le seuil est obtenu à partir de (2.97) pour une valeur de PFA donnée.

Après avoir étudié la PD associée à la statistique de test  $S$ , nous nous focalisons sur le calcul de la PDL asymptotique.

### 2.3.2.2.3 Expression analytique de la probabilité de détection et de localisation (PDL) asymptotique

On considère qu'il y a détection et localisation lorsque deux conditions sont vérifiées :

- $S_N > \epsilon$ , il s'agit de la condition de détection,
- les indices  $i_1, \dots, i_K$  correspondent aux vraies positions de la cible, c'est-à-dire dans notre cas :  $i_1 = 1, \dots, i_K = K$ . Il s'agit de la condition de localisation.

D'après (2.73), la statistique  $S_N$  correspond asymptotiquement à la somme des  $K$  plus grandes énergies des signaux reçus après filtrage adapté. Dans ce cas, la combinaison de ces deux conditions implique que l'on a :

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{2}{\sigma^2} \max_{[i_1, \dots, i_K] \in \Omega_K} |\mathbf{s}^H(i_1 \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2 + \dots + |\mathbf{s}^H(i_K \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2 + o(1) \\ &= \frac{2}{\sigma^2} (|\mathbf{s}^H(\delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2 + \dots + |\mathbf{s}^H(K \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2) + o(1) \end{aligned} \quad (2.103)$$

La contrainte de localisation implique donc la relation d'ordre suivante :

$$|\mathbf{s}^H(\delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(K \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2 > |\mathbf{s}^H((K+1) \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(Q \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2$$

La PDL peut alors s'écrire :

$$\mathbb{P}_1 \left( \{S_N > \epsilon\} \cap \{|\mathbf{s}^H(\delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(K \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2 > |\mathbf{s}^H((K+1) \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(Q \delta) \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{y}|^2\} \right) \quad (2.104)$$

Comme pour le cas de la PFA et de la PD, en s'appuyant sur la propriété 1, on montre que la PDL vérifie asymptotiquement :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_1 \left( \{S_N > \epsilon\} \cap \{|\mathbf{s}^H(\delta)\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(K\delta)\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{y}|^2 > |\mathbf{s}^H((K+1)\delta)\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{y}|^2, \dots, |\mathbf{s}^H(Q\delta)\mathbf{D}_{f_0}\mathbf{y}|^2\} \right) \\ & \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_1 \left( \{S > \epsilon\} \cap \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

La preuve de la convergence de la PDL vers la PDL asymptotique est identique au cas de la PFA.

Dans la suite, on cherche une expression de la PDL asymptotique donnée par :

$$\mathbb{P}_{DL} = \mathbb{P}_1 \left( \{S > \epsilon\} \cap \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right) \quad (2.106)$$

On développe alors (2.106) de manière identique au cas de la PFA en faisant appel aux statistiques d'ordre pour obtenir la distribution de la variable  $S$ . En conditionnant la probabilité (2.106) à l'événement  $\{|z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\}$ , il vient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_1 \left( \left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_K|^2) > \epsilon \right\} \cap \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right) \\ & = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \mathbb{P}_1 \left( \left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_K|^2) > \epsilon \right\} \cap \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right. \\ & \quad \left. \cap \{|z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\} \right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

L'intersection des événements  $\{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\}$  et  $\{|z_{i_1}|^2 > \dots > |z_{i_Q}|^2\}$  n'est pas l'ensemble vide lorsque  $(i_1, \dots, i_K) \in \{1, \dots, K\}$  et  $(i_{K+1}, \dots, i_Q) \in \{K+1, \dots, Q\}$  avec  $i_1, \dots, i_Q$  distincts. Dans ce cas, on peut limiter la somme sur l'ensemble  $\Omega'_Q$  qui est l'ensemble des permutations des ensembles  $\{1, \dots, K\}$  et  $\{K+1, \dots, Q\}$ . On a  $\text{card}(\Omega'_Q) = K!(Q-K)!$ .

(2.107) peut se simplifier en procédant en trois étapes comme pour la PFA :

1. nous appliquons le lemme 1 afin d'obtenir une expression de  $\mathbb{P}_{DL}$  faisant intervenir les variables aléatoires  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  ;
2. puis, nous explicitons les densités de probabilité des variables  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  pour toutes les permutations  $i_1, \dots, i_Q$  ;
3. enfin, l'expression analytique de la PDL asymptotique s'obtient en calculant la fonction de répartition de  $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q}$  et en insérant ce résultat dans l'expression (2.78) du lemme 1.

Pour la première étape, nous rappelons que sachant que la cible est contenue dans les  $K$  premières cases distance, les variables  $\frac{2}{\sigma^2}|z_1|^2, \dots, \frac{2}{\sigma^2}|z_K|^2$  sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\frac{\rho}{2}$  et les variables  $\frac{2}{\sigma^2}|z_{K+1}|^2, \dots, \frac{2}{\sigma^2}|z_Q|^2$  sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ . En appliquant le lemme 1 aux variables :

$$X_1 = \frac{2}{\sigma^2}|z_1|^2, \dots, X_Q = \frac{2}{\sigma^2}|z_Q|^2$$

il vient, d'après (2.78) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{DL} & = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega'_Q} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^K \left(\frac{1}{2}\right)^{Q-K}}{\frac{\rho}{2} \frac{2\rho}{2} \dots \frac{K\rho}{2} \frac{K\rho+1}{2} \dots \frac{K\rho+Q-K}{2}} \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \\ & = \frac{1}{K!(K\rho+1)\dots(K\rho+Q-K)} \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega'_Q} \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \end{aligned} \quad (2.108)$$

où les variables  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  sont distribuées selon des lois exponentielles de paramètres  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  vérifiant, d'après (2.79) :

$$\theta_{i_q} = \begin{cases} \frac{\rho}{2} & q = 1, \dots, K \\ \frac{K\rho + q - K}{2K} & q = K + 1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.109)$$

Les  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  ne dépendent plus de la permutation  $i_1, \dots, i_Q$  donc les variables  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  non plus. Dans ce cas, sachant que  $\text{card}(\Omega'_Q) = K!(Q - K)!$ , (2.108) peut se simplifier comme suit :

$$\mathbb{P}_{DL} = \frac{(Q - K)!}{(K\rho + 1) \dots (K\rho + Q - K)} \mathbb{P}(\Delta_1 + \dots + \Delta_Q > \epsilon) \quad (2.110)$$

Pour la deuxième étape, la densité de probabilité de la somme  $\Delta_1 + \dots + \Delta_Q$  est obtenue à partir du lemme 2 avec :

$$\phi_0 = \frac{\rho}{2} \quad (2.111)$$

et :

$$\phi_q = \frac{K\rho + q}{2K}, \quad q = 1, \dots, Q - K \quad (2.112)$$

Dans ce cas, la densité de probabilité de la somme  $\Delta_1 + \dots + \Delta_Q$  est donnée par (2.84), où les paramètres  $\mu$  et  $\beta_{q, Q-K}$  vérifient :

$$\mu = \frac{(K\rho + 1) \dots (K\rho + Q - K)}{(2K)^{Q-K}} \quad (2.113)$$

$$\beta_{q, Q-K} = (2K)^{Q-K-1} \frac{(-1)^q}{(Q - K - q)!(q - 1)!} \quad (2.114)$$

A ce stade, nous avons obtenu la densité de probabilité de la variable  $S$  à partir de la densité de probabilité de la somme  $\Delta_1 + \dots + \Delta_Q$ .

Pour la troisième étape, on réutilise le développement de la PFA asymptotique puisque seuls les paramètres  $\mu$  et  $\beta_{q, Q-K}$  sont différents dans l'expression de la densité de probabilité (2.84). Dans ce cas, à partir de (2.97), la probabilité  $\mathbb{P}(\Delta_1 + \dots + \Delta_Q > \epsilon)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_1 + \dots + \Delta_Q > \epsilon) &= 1 \\ &- \mu(\phi_0)^K \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q, Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \left( \frac{1 - \exp((- \phi_q) \epsilon)}{\phi_q} - \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(\phi_0 - \phi_q)^m}{m!} \frac{1}{(\phi_0)^{m+1}} p_\gamma(\phi_0 \epsilon; m + 1) \right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

En insérant (2.115) dans (2.110), la PDL asymptotique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{DL} &= \frac{(Q - K)!}{(K\rho + 1) \dots (K\rho + Q - K)} - \frac{(Q - K)!}{2K} (\phi_0)^K \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q, Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \\ &\quad \left( \frac{1 - \exp((- \phi_q) \epsilon)}{\phi_q} - \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(\phi_0 - \phi_q)^m}{m!} \frac{1}{(\phi_0)^{m+1}} p_\gamma(\phi_0 \epsilon; m + 1) \right) \end{aligned} \quad (2.116)$$

*Remarque :* Dans la PDL asymptotique donnée par (2.116), on remarque la limite suivante lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{DL} &= \mathbb{P}_1 \left( \left\{ \frac{2}{\sigma^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_K|^2) > \epsilon \right\} \cap \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_1 \left( \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right) \end{aligned} \quad (2.117)$$

En passant à la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0 dans (2.116), il vient :

$$\mathbb{P}_1 \left( \{|z_1|^2, \dots, |z_K|^2 > |z_{K+1}|^2, \dots, |z_Q|^2\} \right) = \frac{(Q-K)!}{(K\rho+1)(K\rho+2)\dots(K\rho+Q-K)} \quad (2.118)$$

On définit le RSB noté  $\eta$  comme suit :

$$\eta = \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \quad (2.119)$$

d'où  $\rho = \frac{1}{1+\eta}$ . D'après (2.118), on en déduit que le RSB impacte la borne supérieure de la PDL asymptotique. En particulier, si le RSB tend vers l'infini,  $\rho$  tend vers 0 et la PDL tend vers 1.

Disposant des expressions des PFA et PDL pour la statistique de test  $S$  permettant d'approximer les PFA et PDL de la statistique de test  $S_N$ , nous présentons des résultats de simulation dans la partie suivante.

### 2.3.2.3 Simulations : évaluation des performances du détecteur proposé

Nous avons testé différents scénarios pour confirmer que les résultats théoriques pour la PFA (2.75) et la PDL (2.110). A titre d'illustrations, nous présentons quelques exemples dans ce mémoire de thèse. Pour cela, on considère que le signal  $\mathbf{s}$  est une impulsion modulée linéairement en fréquence de durée  $T$  et de bande  $B$ . Les valeurs par défaut des différents paramètres sont :

$$B = 2.10^6 \text{ Hz}, \quad T = 100.10^{-6} \text{ s}, \quad f_s = 2B \quad (2.120)$$

avec  $f_s$  la fréquence d'échantillonnage du chirp. On en déduit que  $N = \lfloor T/T_s \rfloor = 400$ .

On rappelle que les expressions analytiques obtenues sont des résultats asymptotiques. Dans les simulations, le terme "théorique" fait référence aux expressions analytiques des performances de détection pour le test  $S$  alors que le terme « empirique » fait référence à des simulations de Monte Carlo pour lesquelles nous avons simulé plusieurs tirages du vecteur aléatoire  $\mathbf{y}$  selon sa distribution. Pour obtenir les résultats dits empiriques, nous avons effectué 40 000 Monte-Carlo.

#### 2.3.2.3.1 Résultats de simulation pour la PFA

Dans ce paragraphe, nous vérifions la validité de la PFA asymptotique pour différentes valeurs de  $K$  et de  $Q$ . Pour chaque couple de valeur  $(Q, K)$ , nous traçons deux courbes :

- la PFA théorique asymptotique donnée par (2.97),
- la PFA empirique associée à la variable  $S_N$  définie par (2.69).

### Influence du paramètre $K$

On trace les PFA théorique et empirique en fonction du seuil  $\epsilon$  pour  $K = 2$ ,  $K = 6$  et  $K = 9$ , Cf. Fig. 2.10-2.11.

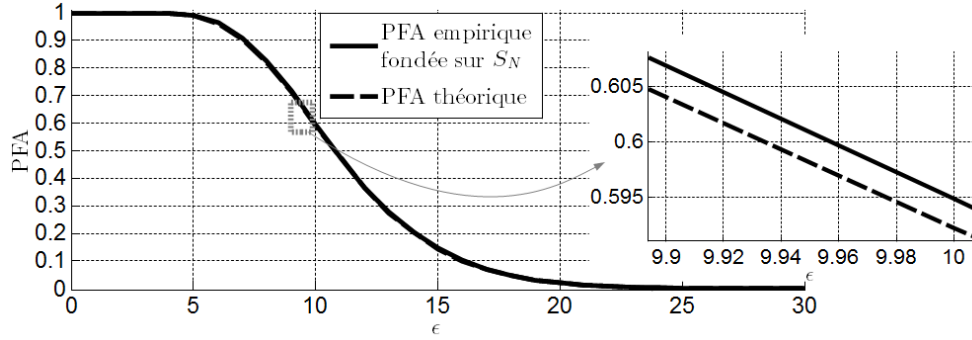


FIGURE 2.10 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé,  $Q = 15$ ,  $K = 2$

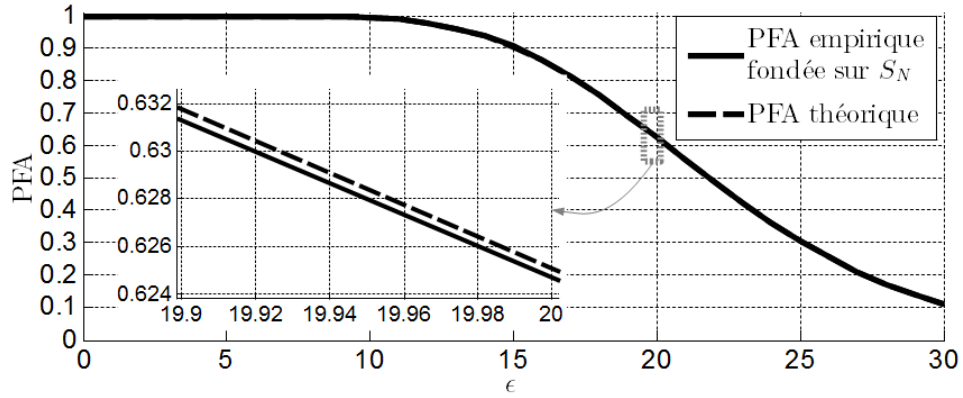


FIGURE 2.11 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé,  $Q = 15$ ,  $K = 6$

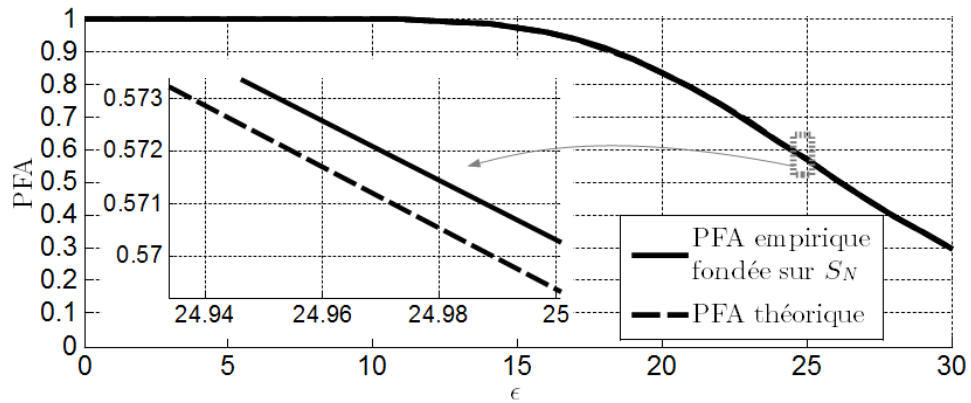


FIGURE 2.12 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé,  $Q = 15$ ,  $K = 9$

On remarque que les courbes théorique et empirique se superposent quasiment quelle que soit la valeur de  $K$ . En effet, l'écart entre les courbes est inférieur à  $1/\sqrt{40\,000} \approx 0.005$ . De plus, lorsque le nombre  $K$  de points brillants augmente, on somme un plus grand nombre de points

brillants, c'est-à-dire que pour un seuil  $\epsilon$  donné, la probabilité de dépasser ce seuil est d'autant plus grande que  $K$  augmente.

### Influence du paramètre $Q$

On trace les probabilités de fausse alarme théorique et empirique en fonction du seuil  $\epsilon$  pour plusieurs valeurs du nombre  $Q$  de cases distances considérées, Cf. Fig. 2.13-2.15.

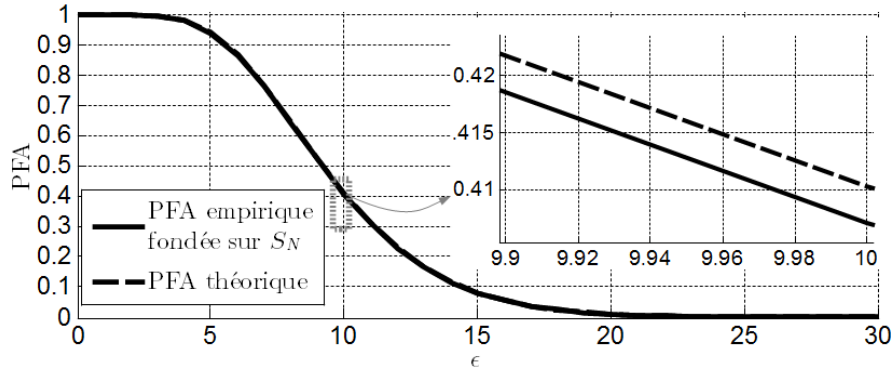


FIGURE 2.13 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé,  $Q = 10, K = 2$

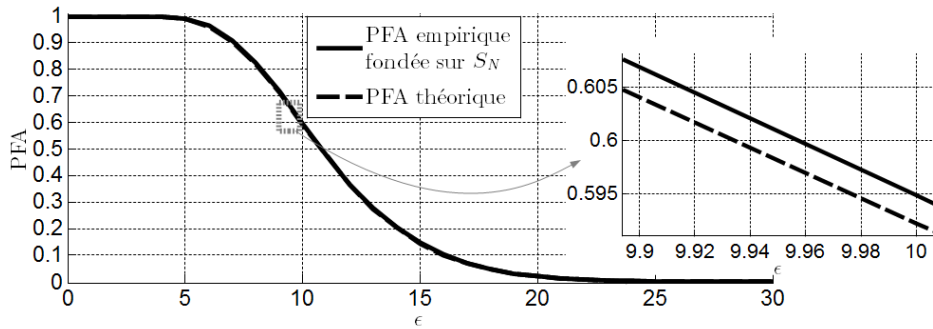


FIGURE 2.14 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé,  $Q = 15, K = 2$

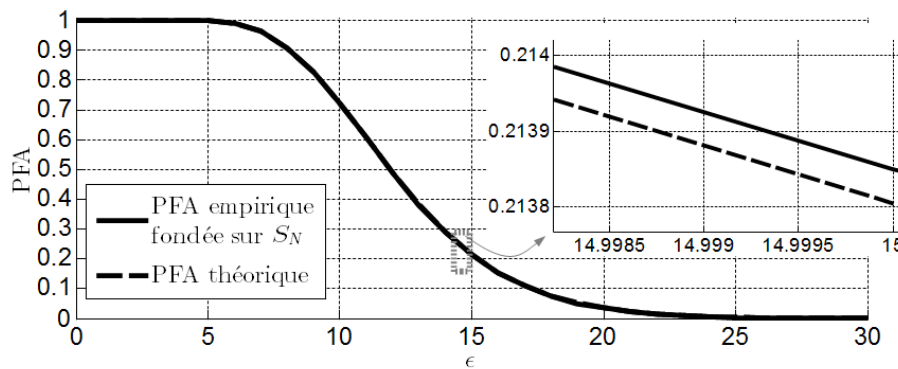


FIGURE 2.15 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé,  $Q = 20, K = 2$

De même, on remarque que les courbes théorique et empirique se superposent quasiment quelle que soit la valeur de  $Q$ . De plus, pour un seuil  $\epsilon$ , la probabilité de dépasser ce seuil est

d'autant plus grande que  $Q$  augmente.

On note que la valeur de bande passante du signal émis correspond à une résolution en distance de  $75\text{ m}$ . Toutefois, comme nous l'avons montré, c'est la valeur de  $N$  qui détermine la qualité de l'approximation. A titre d'illustration, nous avons effectué les mêmes simulations pour une impulsion de bande passante  $B = 150\text{ MHz}$  et de durée  $T = 30\text{ }\mu\text{s}$  correspondant à une résolution en distance de  $1\text{ m}$ . Pour ces valeurs de  $B$  et de  $T$ , on a  $N = 9000$ .

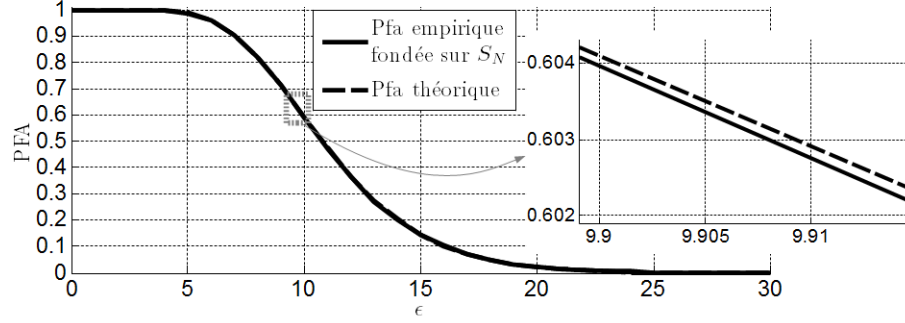


FIGURE 2.16 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé pour un signal émis de bande passante  $B = 150\text{ MHz}$  et de durée  $T = 30\text{ }\mu\text{s}$ ,  $Q = 15$ ,  $K = 2$

Comme attendu, en comparant la figure 2.16 par rapport à la figure 2.10, on note que l'écart entre les deux courbes est réduit.

Enfin, les valeurs de PFA utilisées en radar pour déterminer le seuil de détection sont de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-8}$ . Pour simuler de telles conditions, il faut que le nombre de simulations de Monte Carlo soit supérieur à  $10^7$  ou  $10^8$ . Pour une raison de coût calculatoire, nous n'avons pu reproduire la simulation précédente avec une telle valeur. Néanmoins, on peut considérer la PFA empirique issue de la statistique de test  $S$  et la comparer à la PFA théorique. Nous avons pris  $10^8$  réalisations des variables gaussiennes  $z_1, \dots, z_Q$  et avons tracé le résultat sur la figure 2.17.

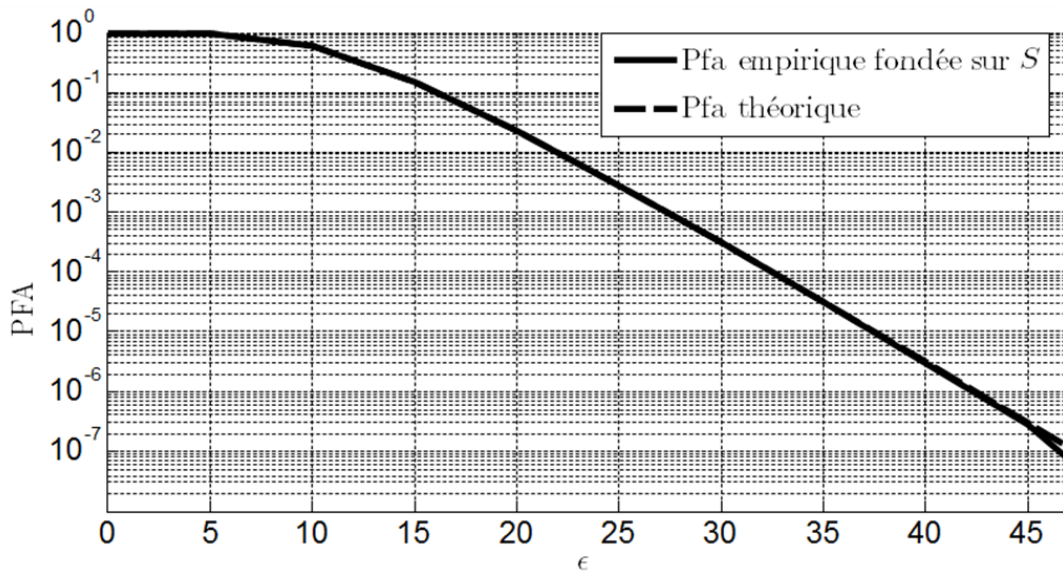


FIGURE 2.17 – PFA théorique et empirique du détecteur analysé pour  $10^8$  simulations de Monte Carlo



Comme illustré sur la figure 2.17, la PFA théorique et la PFA empirique fondée sur  $S$  sont proches, mêmes pour des PFA allant jusqu'à  $10^{-7}$ .

### 2.3.2.3.2 Résultats de simulation pour la PDL

Pour illustrer la précision de la PDL asymptotique, nous traçons la courbe théorique à partir de (2.116) et la courbe de la PDL empirique relative à la variable de test  $S_N$ .

A titre d'exemple, nous traçons la PDL en fonction du seuil  $\epsilon$  pour un RSB de 5 dB pour les couples de valeurs  $(Q = 15, K = 2)$ ,  $(Q = 15, K = 6)$  et  $(Q = 20, K = 2)$ .

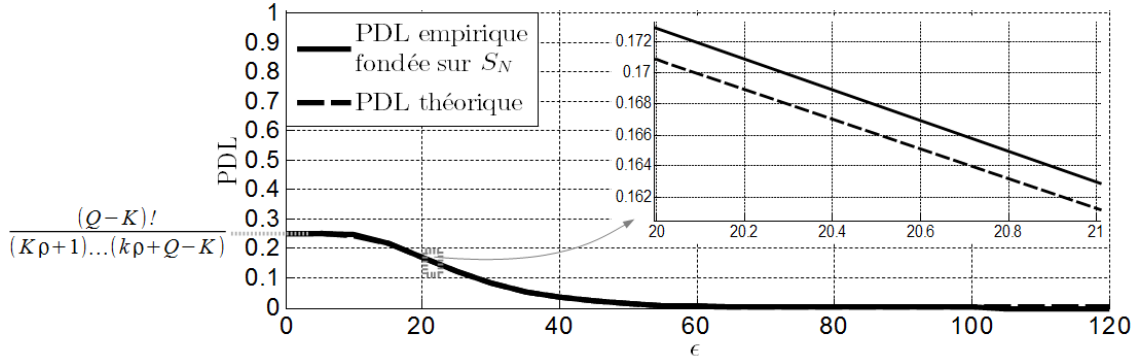


FIGURE 2.18 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du seuil,  $Q = 15, K = 2$

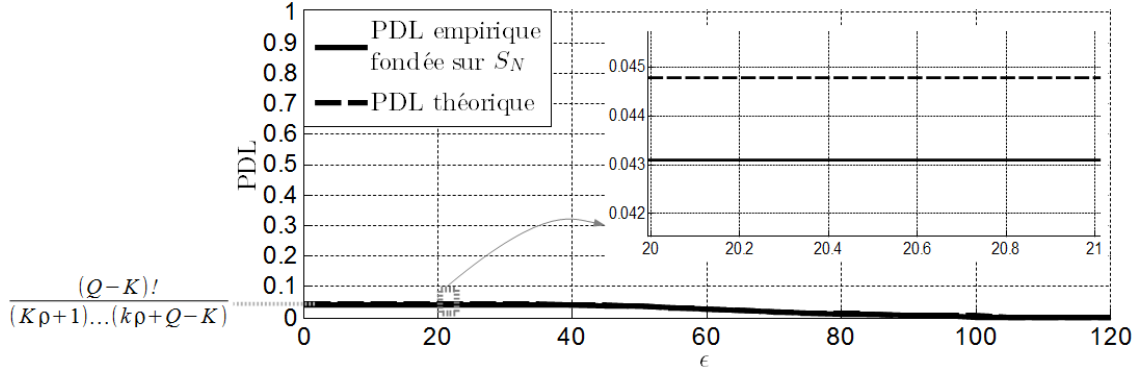


FIGURE 2.19 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du seuil,  $Q = 15, K = 6$

En comparant les figures 2.18 et 2.19 puis les figures 2.18 et 2.20, on note que les courbes théoriques et empiriques se rejoignent quasiment pour différentes valeurs de  $K$  et de  $Q$ . De plus, lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, on retrouve le résultat (2.118).

A présent, on trace la PDL en fonction du RSB. Le seuil est obtenu à partir de l'expression (2.97) de la PFA pour  $\mathbb{P}_{FA} = 10^{-3}$ .

Sur les figures 2.21-2.23, les courbes empiriques et théoriques se rejoignent quasiment, ce qui permet de confirmer que l'expression théorique de la PDL relative à  $S$  est proche de la PDL relative à  $S_N$ . Toutefois, sur la figure 2.22, on remarque un écart supérieur aux autres figures. Cet écart est dû au fait que l'on suppose les signaux reçus parfaitement décorrélés. En pratique,

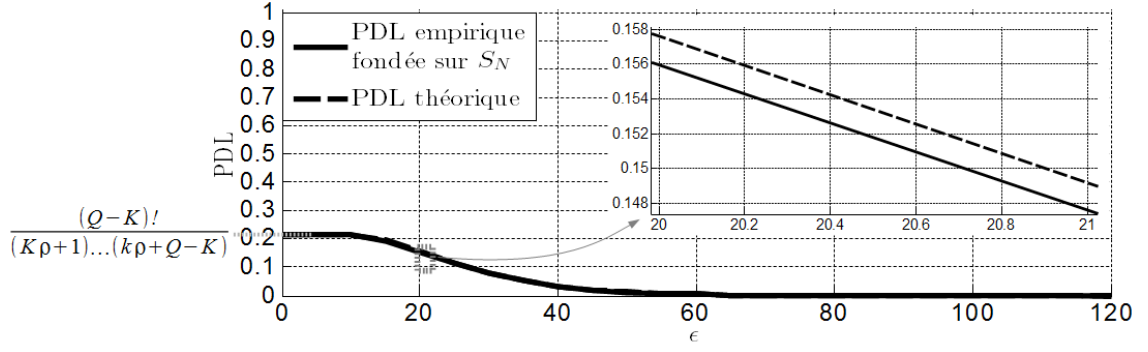


FIGURE 2.20 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du seuil,  $Q = 20, K = 2$

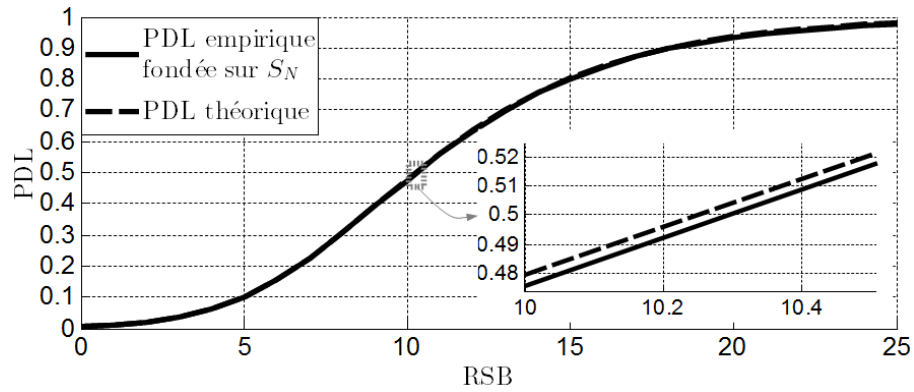


FIGURE 2.21 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour  $Q = 15, K = 2$

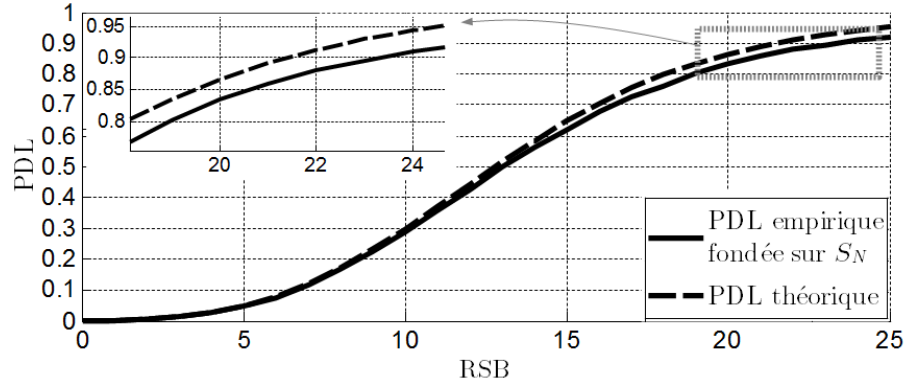


FIGURE 2.22 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour  $Q = 15, K = 5$

la fonction d'autocorrélation du signal émis possède des lobes secondaires non nuls. Lorsqu'il y a  $K = 5$  réflecteurs, on somme alors la contribution des lobes secondaires liés à chaque réflecteurs. C'est la raison pour laquelle ce phénomène est moindre pour un nombre plus petit de réflecteurs.

A titre d'illustration, on trace les mêmes courbes que la figure 2.22 pour un signal dont la bande passante est multiplié par 10, ce qui revient à multiplier le nombre d'échantillons  $N$  du signal émis par 10.

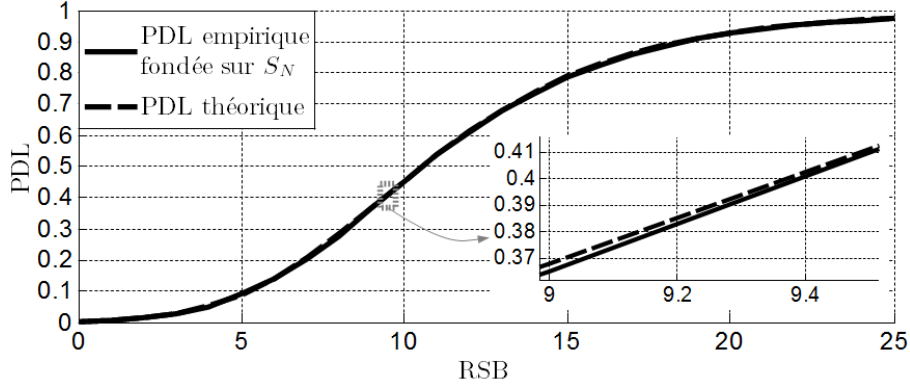


FIGURE 2.23 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour  $Q = 20, K = 2$

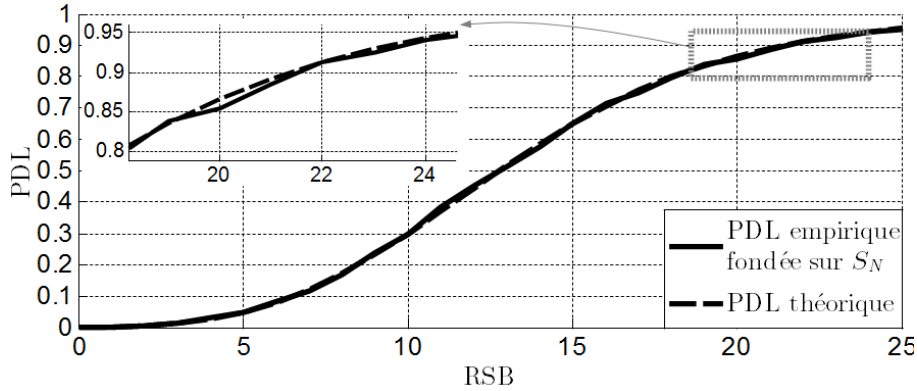


FIGURE 2.24 – PDL théorique et empirique du détecteur analysé en fonction du RSB pour  $K = 5, Q = 15$  et  $B = 10 \text{ MHz}$

Sur la figure<sup>18</sup> 2.24, l'écart entre les courbes est réduit par rapport à la figure 2.22.

### 2.3.3 Etude comparative par simulations

Pour mener une étude comparative équitable entre les différents détecteurs, la PDL ne convient pas car certains détecteurs ne tiennent pas compte de la localisation des  $K$  réflecteurs. Dans ce cas, nous choisissons d'utiliser la PD comme critère de comparaison.

Ne disposant pas d'expression théorique pour la PD du détecteur étudié, nous l'estimons à partir de simulations de Monte-Carlo.

Nous effectuons alors une comparaison du détecteur somme-des- $K$ -max avec le détecteur quadratique, le détecteur  $K/Q$  et le détecteur SSD [GER97]. Les seuils sont obtenus à partir des PFA relatives à chaque détecteur, c'est-à-dire (2.56) pour le détecteur quadratique, (2.61) pour le détecteur  $K/Q$  et la PFA empirique du test décrit en [GER97] pour le détecteur SSD.

18. Pour une raison de taille mémoire, nous avons dû réduire le nombre de simulations de Monte Carlo à 5000 d'où le fait que la courbe empirique apparaît moins « lisse » que sur les autres figures.

### Influence du paramètre $K$

On trace premièrement les PD pour différentes valeurs de  $K$  pour  $Q = 15$ .

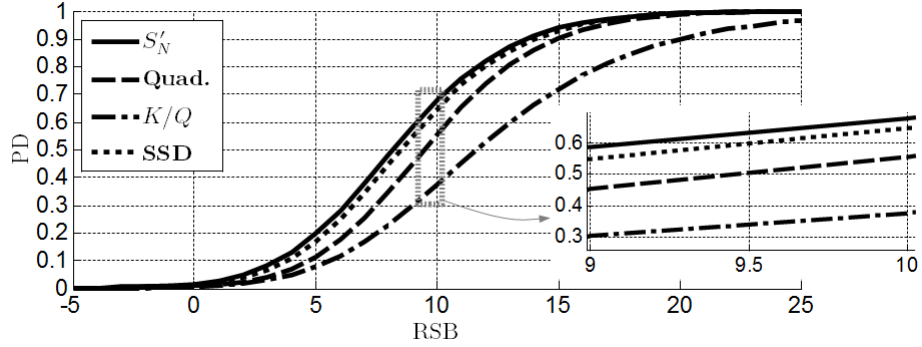


FIGURE 2.25 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour  $Q = 15, K = 2$

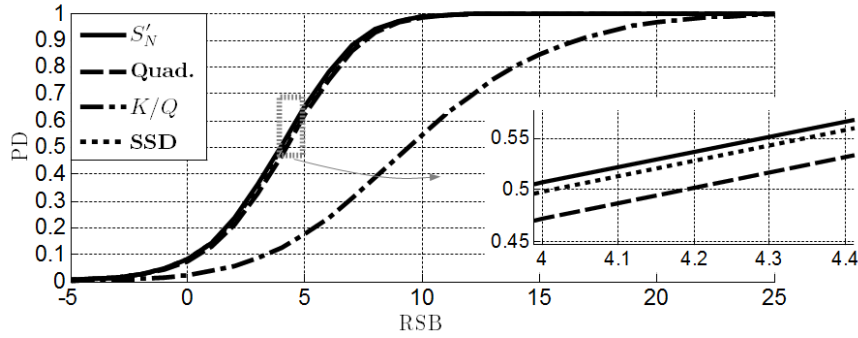


FIGURE 2.26 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour  $Q = 15, K = 6$

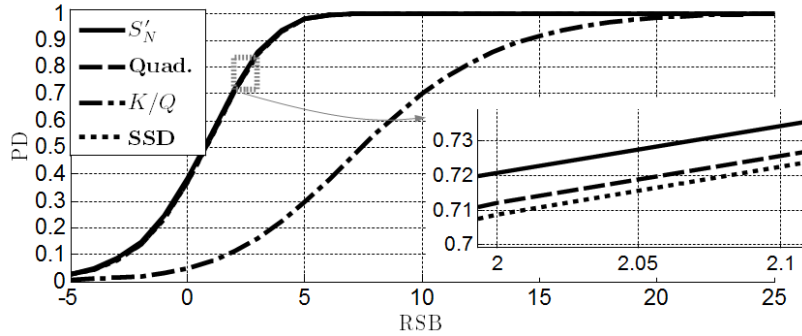


FIGURE 2.27 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour  $Q = 15, K = 13$

D'après les figures 2.25-2.27, plusieurs remarques peuvent être formulées. Premièrement, on note que quelle que soit la valeur de  $K$ , la PD du détecteur somme-des- $K$ -max est supérieure aux PD des autres détecteurs. Lorsque  $K$  se rapproche de  $Q$  (Cf. Fig. 2.27), les PD du détecteur somme-des- $K$ -max, du détecteur SSD et du détecteur quadratique se rapprochent et sont quasiment identique pour  $K = 13$ . Ce résultat se justifie par le fait que lorsque  $K = Q$ , le détecteur somme-des- $K$ -max correspond au détecteur quadratique.

### Influence du paramètre $Q$

A présent, on trace la PD pour différentes valeurs de  $Q$  pour  $K = 2$ .

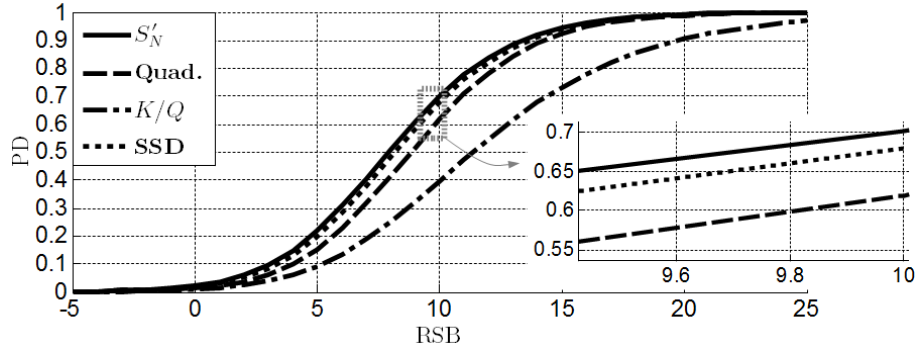


FIGURE 2.28 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour  $Q = 10, K = 2$

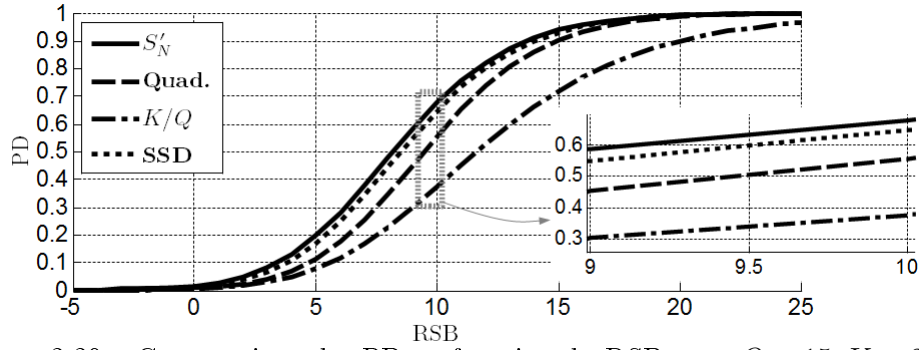


FIGURE 2.29 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour  $Q = 15, K = 2$

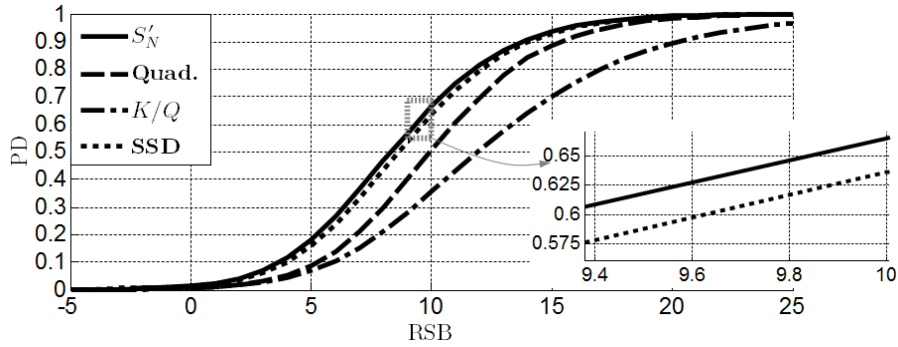


FIGURE 2.30 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour  $Q = 20, K = 2$

A nouveau, quelle que soit la valeur de  $Q$ , c'est le détecteur somme-des- $K$ -max qui présente les meilleures PD.

### Influence d'une erreur d'estimation du paramètre $K$

En pratique, la vraie valeur de  $K$  est inconnue. Afin de mener une étude de sensibilité au paramètre  $K$ , nous traçons les PD pour  $K = 2, K = 4$  et  $K = 6$  pour une cible constituée de 4 réflecteurs, Cf. Fig. 2.31-2.33.

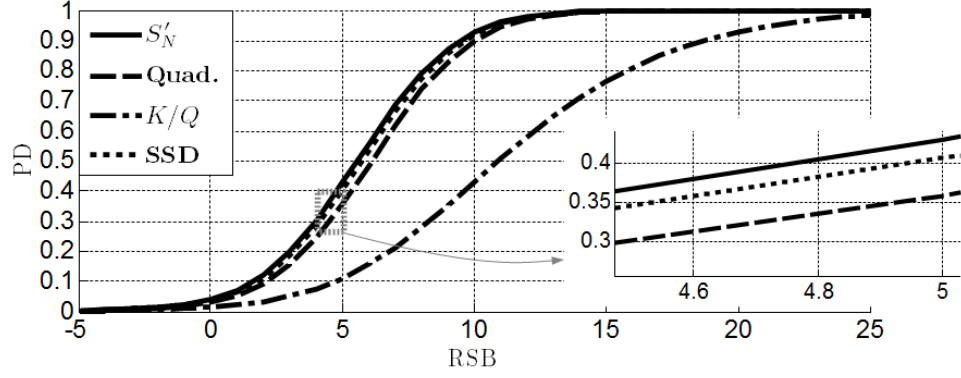


FIGURE 2.31 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour une cible avec 4 réflecteurs,  $K = 4$

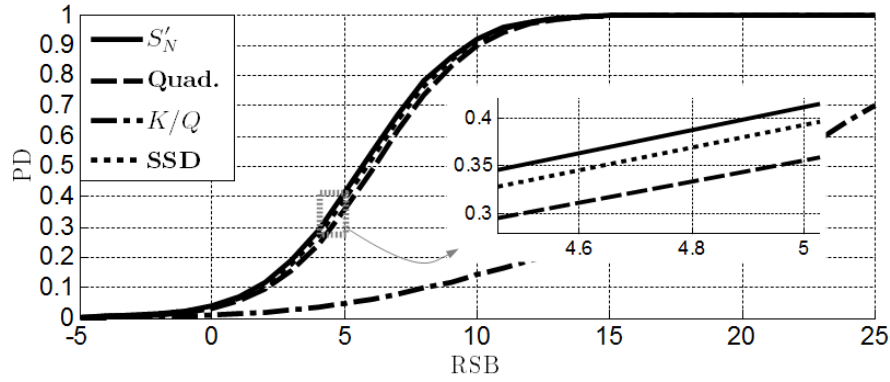


FIGURE 2.32 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour une cible avec 4 réflecteurs,  $K$  sur-estimé

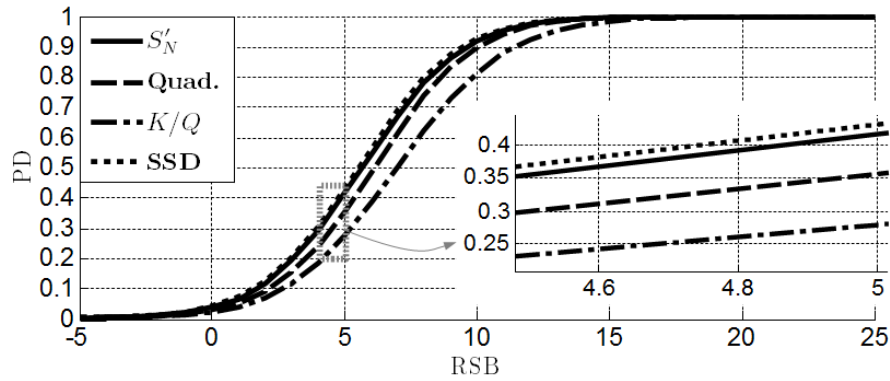


FIGURE 2.33 – Comparaison des PD en fonction du RSB pour une cible avec 4 réflecteurs,  $K$  sous-estimé

D'après la figure 2.31, pour un RSB donné, la PD pour le détecteur proposé est supérieure à la PD du détecteur quadratique et à la PD du détecteur de [GER97] lorsque  $K$  est correctement estimé. Lorsque  $K$  est sur-estimé ou sous-estimé, à RSB fixé, la PD du détecteur de Gerlach est sensiblement proche de la PD du détecteur proposé car l'écart entre les PD est inférieur à 0,02. Cf. Fig. 2.33. On note enfin que le détecteur  $K/Q$  est sensible à l'estimation de  $K$ .

## 2.4 Bilan sur la détection d'une cible étendue

Nous avons étudié la détection d'une cible modélisée par  $K$  réflecteurs répartis sur  $Q$  cases distance en présence de bruit blanc gaussien circulaire. Pour cela, nous avons commencé par dresser un état de l'art des différents détecteurs existants, c'est-à-dire le détecteur quadratique, le détecteur optimal [VAN71], le détecteur  $K/Q$  [SHN98] et le détecteur SSD [GER97]. Puis, en supposant les positions des réflecteurs équiprobables, nous avons analysé le GLRT dans le cas où les positions des réflecteurs sont inconnues. Sous l'hypothèse de décorrélation des signaux reçus, la statistique de test obtenue consiste à considérer les énergies des signaux reçus après filtrage adapté et à sommer les  $K$  plus grandes. Nous avons caractérisé ce détecteur en fournissant une expression approchée de la PFA et de la PDL lorsque  $K$  est supposé défini *a priori*. Après avoir validé ces expressions théoriques avec des simulations de Monte Carlo, nous avons mené une étude comparative avec différents détecteurs de la littérature. Nous avons alors montré que le détecteur proposé présente des performances de détection meilleures ou égales aux trois autres détecteurs.

## Chapitre 3

# Optimisation de formes d'onde

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappels sur la détection d'une cible composée d'un seul point brillant</b>	<b>22</b>
2.2.1	Détection en présence de bruit thermique . . . . .	22
2.2.1.1	Traitement de détection . . . . .	23
2.2.1.2	Performances de détection . . . . .	24
2.2.2	Détection en présence de fouillis gaussien . . . . .	27
<b>2.3</b>	<b>Détection d'une cible à multiples points brillants . . . . .</b>	<b>29</b>
2.3.1	Etat de l'art sur les détecteurs d'une cible étendue . . . . .	30
2.3.1.1	Le détecteur « quadratique » . . . . .	32
2.3.1.2	Le détecteur « K/Q » . . . . .	35
2.3.1.3	Le détecteur dit « optimal » . . . . .	36
2.3.1.4	Le détecteur « SSD » . . . . .	38
2.3.2	Contribution : étude d'un GLRT pour la détection d'une cible composée de $K$ points brillants non nécessairement consécutifs . . . . .	39
2.3.2.1	Traitement de détection . . . . .	39
2.3.2.2	Performances de détection . . . . .	41
2.3.2.3	Simulations : évaluation des performances du détecteur proposé	50
2.3.3	Etude comparative par simulations . . . . .	56
<b>2.4</b>	<b>Bilan sur la détection d'une cible étendue . . . . .</b>	<b>60</b>

---



### 3.1 Introduction

DE manière générale, la conception d'une forme d'onde consiste à identifier le ou les critères d'intérêt, puis à déterminer la forme d'onde qui le ou les optimise. Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur la conception d'une forme d'onde  $s$  unique qui soit compatible avec deux chaînes de traitement basse et haute résolution. L'intérêt de ce système bi-résolution est de tirer profit du faible coût calculatoire de la voie de traitement basse résolution pour détecter une cible, puis d'utiliser la voie haute résolution pour en déduire le profil distance en vue de son identification, Cf. Fig. 3.1.

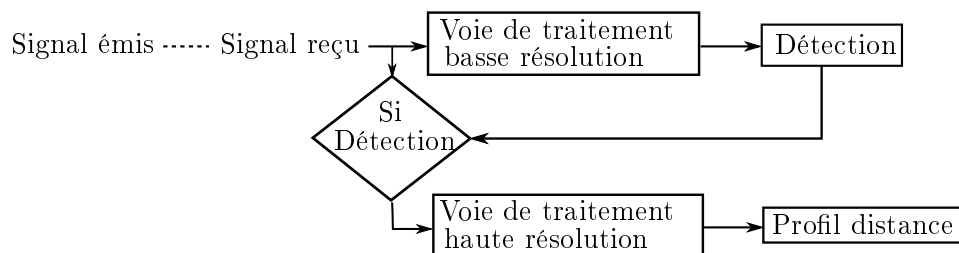


FIGURE 3.1 – Schéma du principe du système bi-résolution

Ce chapitre s'organise alors comme suit : dans un premier temps, nous proposons de dresser un état de l'art sur l'optimisation de forme d'onde et les différents critères d'optimisation couramment utilisés. Dans un second temps, nous considérons la conception d'une forme d'onde pour le système bi-résolution décrit par la figure 3.1. En particulier, nous analysons l'optimisation d'une forme d'onde composée de deux codes de phase en présence de fouillis gaussien dans un cas mono-résolution premièrement, puis dans un cas bi-résolution. On note que ce type de scénario correspond plutôt à une configuration de détection air-mer.

### 3.2 Etat de l'art sur l'optimisation de formes d'onde

Dans cette partie, il s'agit de dresser un état de l'art sur les différentes approches existantes sur l'optimisation de formes d'onde radar. Sachant que la mission principale du radar consiste à détecter une cible, les deux critères les plus couramment rencontrés sont :

- les performances de détection, c'est-à-dire la probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme fixée,
- le rapport signal-à-bruit (RSB) ou le rapport signal-à-bruit plus interférence (RSBI), où l'interférence peut être du fouillis par exemple.

Ainsi, dans [BER05], les auteurs analysent l'optimisation du RSBI pour la détection d'une cible ponctuelle en présence de fouillis gaussien centré. A partir d'une décomposition en valeurs propres et en vecteurs propres de la matrice de corrélation, et sachant que les vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus grandes définissent le sous-espace du fouillis, ils proposent de définir le signal à émettre à partir d'une combinaison linéaire des vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus faibles. Dans [KAY07], la conception d'une forme d'onde revient à optimiser les performances de détection. A partir de la maximisation de la probabilité de détection, l'auteur obtient une expression analytique de la densité spectrale de puissance de la forme d'onde optimale. Toutefois, maximiser uniquement le RSBI ou la probabilité de détection

n'offre pas de garantie d'obtenir une forme d'onde ayant les propriétés requises en termes de résolutions en distance et en fréquence. Pour pallier ces inconvénients, une méthode consiste à ajouter au critère d'optimisation une contrainte de similarité entre la forme d'onde optimale et une forme d'onde prédéfinie. Dans ce cadre, Li *et al.* [L106] optimisent le RSBI sous une contrainte de similarité avec une impulsion modulée linéairement en fréquence. Ils obtiennent alors une expression analytique fondée sur la décomposition en valeurs propres et en vecteurs propres de la matrice de covariance du fouillis. L'inconvénient de cette approche est que la forme d'onde obtenue peut être modulée en amplitude ; or dans le cadre d'un radar aéroporté, l'amplificateur de puissance est utilisé en régime saturé pour garantir la plus grande portée possible, c'est-à-dire que les formes d'onde modulées en amplitude, qui nécessite d'utiliser les amplificateurs de puissance en régime linéaire, ne sont pas des formes d'onde candidates. Pour éviter que la forme d'onde qui optimise le RSBI soit incompatible avec les contraintes d'un radar, De Maio *et al.* [DE 08, DE 09a] s'intéressent aux signaux de type train d'impulsions avec un code de phase  $\mathbf{c}$  inter-impulsion. Ils proposent de déterminer le code  $\mathbf{c}$  qui optimise les performances de détection sous une contrainte de similarité avec un code de phase prédéfini lorsque le signal reçu est perturbé par un bruit gaussien centré corrélé de matrice de corrélation supposée connue. Plus récemment, cette approche d'optimisation sous contrainte a également été déclinée par les mêmes auteurs dans un contexte multi-antennes [DE 10]. Néanmoins, comme dans [DE 08] et [DE 09a], la forme d'onde prédéfinie utilisée pour la contrainte de similarité est choisie pour ses propriétés en termes de signal reçu après filtrage adapté ; or le traitement utilisé en présence d'un fouillis gaussien corrélé n'est pas le filtre adapté seul, sans étape de blanchiment. D'autres approches ont ainsi été proposées. Par exemple dans [PAT09], [PAT12], les auteurs analysent la maximisation du RSBI lorsque le traitement est le filtrage adapté et l'interférence est un bruit gaussien corrélé de matrice de covariance connue. Ils imposent alors une contrainte sur la hauteur des lobes secondaires de la fonction d'autocorrélation du signal optimisé.

Dans le cas de la détection d'une cible ponctuelle en présence de bruit blanc gaussien, la maximisation du RSB ou de la PD revient à maximiser l'énergie du signal émis uniquement. Dans ce cas, d'autres critères d'optimisation sont considérés tels que la minimisation de la largeur du lobe principal et/ou la minimisation des lobes secondaires du signal reçu après traitement. En effet, la minimisation de la largeur du lobe principal revient à minimiser le pas de résolution en distance ou en fréquence et permet de distinguer deux cibles proches. Quant à la minimisation des lobes secondaires, elle a pour but de réduire les fausses détections et d'éviter que le lobe principal d'un signal reçu après traitement issu d'une autre cible soit masqué. Ces critères peuvent également conduire à des formes d'onde non-réalisables en pratique. Pour pallier cet inconvénient, on peut restreindre l'espace des formes d'onde candidates à des familles de formes d'onde données. Le choix de la forme d'onde et la valeur de ses paramètres dépendent alors des caractéristiques en termes de lobe principal et lobes secondaires du signal reçu après traitement. Pour analyser l'allure du signal reçu après traitement, on utilise couramment la fonction d'ambiguïté  $\chi_s$  du signal  $s$  introduite par Woodward [WOO67] et définie dans le cas de signaux discrets par :

$$\begin{aligned}\chi_s(\tau, f) &= \sum_{l=0}^{L-1} s(lT_s) s^*(lT_s - \tau) \exp(-j2\pi f lT_s) \\ &= \mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{s}(0)\end{aligned}\tag{3.1}$$

avec, d'après le paragraphe 1.3.2,  $\mathbf{s}(\tau)$  le vecteur colonne de taille  $L$  contenant les  $N$  échantillons du signal émis retardée de  $\tau$  et  $\mathbf{D}_f$  la matrice diagonale de taille  $L \times L$  qui dépend de la fréquence Doppler  $f$ . On suppose également que  $0 \leq \tau \leq (L - N - 1)T_s$ .

On note que la fonction d'ambiguïté correspond au signal reçu après filtrage adapté sans bruit et lorsque la cible vérifie  $\tau_0 = 0$  et  $f_0 = 0$ .

Dans l'idéal, afin de pouvoir distinguer deux cibles situées dans deux cases adjacentes, il faudrait concevoir un signal  $s$  tel que pour  $\tau \neq \tau_0$  et  $f \neq f_0$  :

$$\mathbf{s}^H(\tau) \mathbf{D}_{f-f_0}^H \mathbf{s}(\tau_0) = 0 \quad (3.2)$$

Cependant, une forme d'onde vérifiant (3.2) n'existe pas. De nombreuses formes d'onde ont alors été étudiées dans la littérature. Elles peuvent être regroupées en trois grandes familles : les formes d'onde non-modulées, les formes d'onde modulées en phase [NUN08, BHA11, BAD15] et les formes d'onde modulées en fréquence [RAB02, GLA05, GLA09]. Dans le cas d'un radar aéroporté de type Doppler à impulsions, le signal émis est un train d'impulsions et la modulation peut donc être appliquée à chaque impulsion et/ou d'impulsion à impulsion [CHE08, LEV09]. On parle de modulation intra et inter-impulsion respectivement. Ces familles et sous-familles sont représentées sur la figure 3.2.

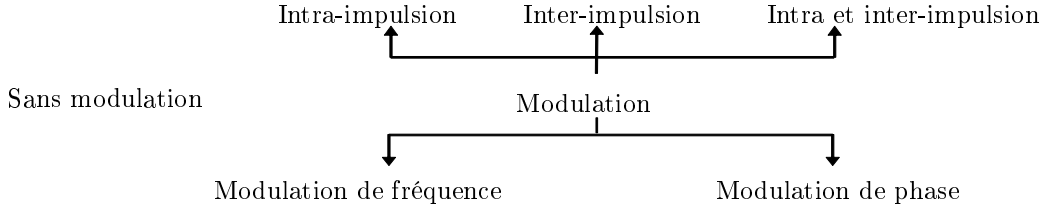


FIGURE 3.2 – Familles et sous-familles de formes d'onde

Pour ces différentes formes d'onde, on note que la résolution en distance est inversement proportionnelle à la bande passante du signal alors que la résolution en fréquence est inversement proportionnelle à la durée du signal. Pour ce qui est des lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté, leurs positions et amplitudes dépendent du nombre  $M$  d'impulsions, de la période de récurrence  $T_r$  et du type de modulation utilisée. Pour plus de détails sur ces différentes familles de formes d'onde et leurs propriétés en termes de fonction d'ambiguïté, le lecteur peut se référer à [LEV04, DE 09b].

Une alternative au filtrage adapté permettant de réduire la hauteur des lobes secondaires est le filtrage dit « désadapté » dont la réponse impulsionnelle  $h$  est choisie de telle sorte à réduire les lobes secondaires. Dans ce cas, la fonction d'ambiguïté relative au filtrage désadapté est appelée « fonction d'ambiguïté croisée » (*cross ambiguity function* en anglais). Elle est définie comme suit :

$$\chi_{s,h}(\tau, f) = \sum_{l=0}^L s(lT_s) h^*(lT_s - \tau) \exp(-j2\pi f lT_s) \quad (3.3)$$

Sachant que le filtrage désadapté implique une réduction de la hauteur du lobe principal par rapport au cas du filtrage adapté, les deux critères d'intérêt pour le choix de la réponse impulsionnelle  $h$  du filtre désadapté sont la minimisation des lobes secondaires et la minimisation

des pertes au niveau de la hauteur du lobe principal par rapport à la hauteur du lobe principal de la fonction d'ambiguïté  $\chi_s$ . Dans [LEV05], Levanon considère la famille des formes d'onde modulées en phase pour  $s$  et  $h$ . Il utilise alors des outils existants de résolution de problème d'optimisation pour obtenir un couple de codes de phase qui minimisent les lobes secondaires. Plus récemment, Rabaste *et al.* ont proposé de minimiser la hauteur des lobes secondaires de la fonction d'intercorrélacion en montrant que ce problème d'optimisation pouvait se mettre sous la forme d'un problème convexe quadratique avec des contraintes quadratiques [RAB14]. Ils ont alors utilisé l'outil de résolution CVX [BOY04] pour obtenir la réponse impulsionnelle du filtre désadapté. En particulier, on note que cette formulation permet d'optimiser conjointement les lobes secondaires et la hauteur du lobe principal.

A partir de ce bref état de l'art sur l'optimisation de formes d'onde, on se focalise sur la conception d'une forme d'onde unique compatible avec deux chaînes de traitement basse et haute résolution. En particulier, nous analysons l'optimisation d'une forme d'onde composée de deux codes de phase en présence de fouillis gaussien dans un cas mono-résolution premièrement, puis dans un cas bi-résolution.

### 3.3 Contributions : optimisation multi-objectifs d'une forme d'onde avec deux codes de phases en présence de fouillis gaussien coloré

Pour concevoir une forme d'onde compatible avec la détection basse résolution et la détection haute résolution, nous avons choisi de nous focaliser sur les formes d'onde composées de deux codes de phase dont l'un est intra-impulsion et l'autre inter-impulsion et nous considérons une cible ponctuelle en présence de fouillis gaussien. Il s'agit alors d'introduire les critères d'intérêts puis, dans un second temps, de déterminer quels sont les codes de phases qui optimisent ces critères.

Le premier critère considéré est la maximisation de la probabilité de détection. Contrairement au cas de la détection d'une cible en présence de bruit blanc gaussien, ce critère dépend du signal émis puisque maximiser la probabilité de détection est équivalent à maximiser la hauteur du lobe principal du signal reçu après traitement. D'autres critères relatifs au signal reçu après traitement peuvent également être considérés comme la minimisation de la largeur du lobe principal pour avoir la meilleure résolution possible, ou encore la minimisation des lobes secondaires pour éviter les fausses détections. Puisqu'il s'agit de concevoir une forme d'onde compatible avec deux voies de traitement basse et haute résolution, ces trois critères sont à prendre en compte pour les signaux reçus en sortie de chaque voie de traitement basse et haute résolution.

Pour déterminer les codes de phase qui optimisent l'ensemble de ces critères, nous proposons d'utiliser une approche d'optimisation multi-objectifs. De plus, afin d'étudier la robustesse à différents fouillis des codes de phases qui sont solutions du problème d'optimisation multi-objectifs, nous proposons de représenter le fouillis par un modèle AR [DE 09a], [PAT09] et [PET10]. Cette modélisation est adaptée à des fouillis gaussien et présente l'avantage de reposer sur un nombre réduit de paramètres. En outre, l'inverse de la matrice de corrélation a une expression analytique fonction des paramètres AR permettant d'explicitier le signal reçu après traitement.

Cette section s'articule comme suit : après avoir introduit la forme d'onde modulée en phase, nous analysons premièrement l'optimisation du lobe principal et des lobes secondaires du signal reçu après traitement dans un cas mono-résolution correspondant à la voie de traitement haute résolution. En particulier, nous décrivons le traitement à la réception, explicitons le signal reçu après traitement puis étudions la sélection des codes de phase. Dans un second temps, nous étendons l'analyse du cas mono-résolution au cas bi-résolution.

### 3.3.1 Expression du signal émis et du signal reçu

Le signal  $s$  considéré est un train de  $M$  impulsions codées en phase alliant un code de phase binaire intra-impulsion et un code de phase binaire inter-impulsion. Il peut donc s'écrire comme suit :

$$s(lT_s) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m s_d(lT_s - mT_r) \quad (3.4)$$

où  $c_m = \pm 1$  est le  $m^{\text{ième}}$  élément du code inter-impulsion  $\mathbf{c}$  de longueur  $M$  et  $s_d$  est l'impulsion de durée  $T$  définie par :

$$s_d(lT_s) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \Pi_{T_c}(lT_s - nT_c) \quad (3.5)$$

avec  $d_n = \pm 1$  le  $n^{\text{ième}}$  élément du code de phase intra-impulsion  $\mathbf{d}$  de longueur  $N$  et  $\Pi_{T_c}$  la fonction porte de largeur  $T_c$  définie comme suit :

$$\Pi_{T_c}(lT_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } lT_s \in [0; T_c] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

On note que :

$$T = NT_c \quad (3.7)$$

et on pose également :

$$\tilde{L} = \frac{T_r - T}{T} \quad (3.8)$$

Sur la figure 3.3, on représente un exemple de signal  $s$  dans le cas de codes binaires.

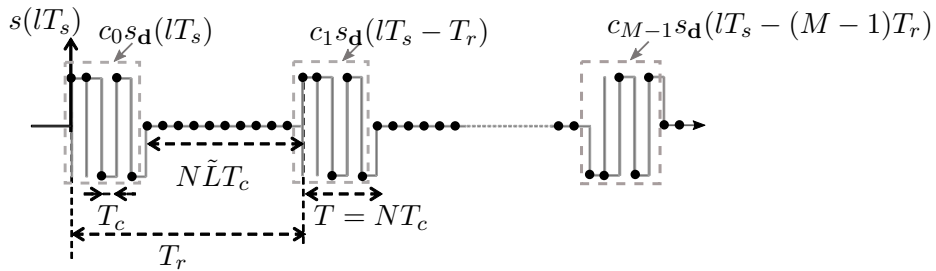


FIGURE 3.3 – Forme d'onde avec un code de phase inter-impulsion  $\mathbf{c}$  et un code de phase intra-impulsion  $\mathbf{d}$

Dans ce qui suit, nous considérons une cible ponctuelle. Sous l'hypothèse de bande étroite, on rappelle que le signal reçu  $\mathbf{y}$  en bande de base peut s'écrire comme le modèle bande étroite (2.1) défini au chapitre 2 :

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} + \mathbf{u} \quad (2.1)$$

où  $\tau_0$  est le retard proportionnel à la distance radar cible,  $f_0$  est la fréquence Doppler induite par la vitesse de la cible,  $\mathbf{b}$  le vecteur des échantillons du bruit thermique,  $\mathbf{u}$  le vecteur des échantillons du fouillis gaussien coloré et  $\alpha$  le coefficient complexe d'atténuation.

### 3.3.2 Optimisation dans un cas mono-résolution

Pour traiter de l'optimisation de la forme d'onde codée en phase, nous commençons par décrire le traitement puis nous explicitons le signal reçu après traitement. Dans un troisième temps, nous présentons les critères d'optimisation retenus nous permettant d'aborder le choix des codes de phase intra et inter-impulsion.

#### 3.3.2.1 Traitements

Le traitement de détection considéré s'appuie sur le traitement proposé dans [DE 08], c'est-à-dire qu'il consiste en un premier filtrage passe-bas, puis un blanchiment suivi d'un filtrage adapté au signal « blanchi », Cf. figure 3.4.

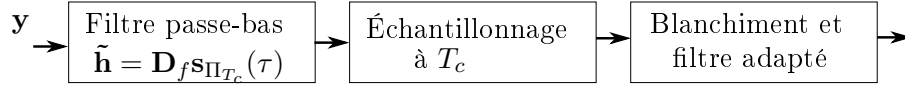


FIGURE 3.4 – Traitements à la réception

Dans ce qui suit, nous détaillons le signal reçu après les différentes étapes afin d'aboutir à une expression du signal reçu en sortie de traitement.

##### a) Filtrage passe-bas

En supposant la fréquence Doppler  $f_0$  connue, le signal reçu est premièrement filtré par le filtre passe-bas de réponse impulsionnelle  $\mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}(\tau)$ . Le signal filtré  $\tilde{z}$  s'écrit comme suit :

$$\tilde{z}(\tau, f) = \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{y} \quad (3.9)$$

avec  $\mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}(\tau) = [\Pi_{T_c}(-\tau) \dots \Pi_{T_c}((L-1)T_s - \tau)]^T$  et  $\mathbf{D}_{f_0}$  la matrice diagonale contenant les échantillons  $1, \exp(j2\pi f_0 T_s), \dots, \exp(j2\pi f_0 (L-1)T_s)$ .

On peut développer (3.9) en remplaçant  $\mathbf{y}$  par son expression (2.1). On aboutit alors à :

$$\tilde{z}(\tau, f_0) = \alpha \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H (\mathbf{b} + \mathbf{u}) \quad (3.10)$$

Dans (3.10), le signal  $\mathbf{s}(\tau_0)$  peut s'écrire à partir de  $\mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}(\tau)$  en insérant (3.5) dans (3.4).  $\mathbf{s}(\tau_0)$  satisfait alors :

$$\mathbf{s}(\tau_0) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_m d_n \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}(mT_r + nT_c + \tau_0) \quad (3.11)$$

Dans ce cas, en tenant compte de (3.11) dans (3.10), il vient :

$$\tilde{z}(\tau, f_0) = \alpha \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_m d_n \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}^H(\tau) \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}(\tau_0 + mT_r + nT_c) + \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H (\mathbf{b} + \mathbf{u}) \quad (3.12)$$

D'après la définition (3.1) de la fonction d'ambiguïté, (3.12) peut s'écrire en fonction de la fonction d'ambiguïté  $\chi_{\Pi_{T_c}}$  du signal  $\Pi_{T_c}$  comme suit :

$$\tilde{z}(\tau, f_0) = \alpha \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_m d_n \chi_{\Pi_{T_c}}(\tau - mT_r - nT_c - \tau_0, 0) + \tilde{v}(\tau, f_0) \quad (3.13)$$

avec  $\tilde{v}$  la perturbation après filtrage contenant la contribution du fouillis et celle du bruit thermique.

*Remarque* : afin de ne pas alourdir les notations, on pose :

$$\tilde{z}(\tau) = \tilde{z}(\tau, f_0) \quad (3.14)$$

### b) Échantillonnage à $T_s = T_c$

$\tau$  est échantillonné à la période  $T_s = T_c$ , c'est-à-dire qu'il existe  $0 \leq \tilde{\ell} < MN\tilde{L}$  tel que :

$$\tau = \tilde{\ell}T_c \quad (3.15)$$

On représente les premiers échantillons de  $\tilde{z}(0), \tilde{z}(T_c), \text{etc.}$  sans la perturbation  $\tilde{v}$  sur la figure 3.5

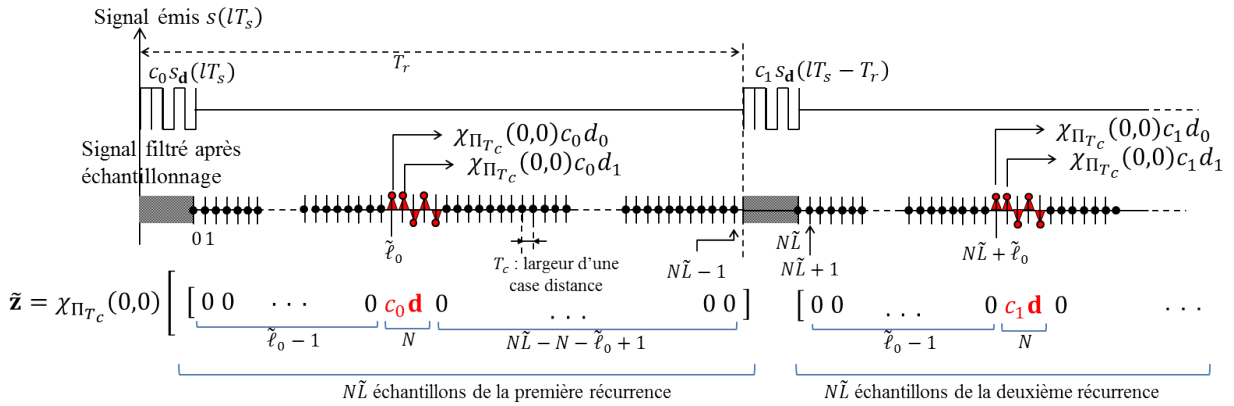


FIGURE 3.5 – Signal reçu après filtrage passe-bas et échantillonnage à  $T_c$

Sur la figure 3.5, on a supposé que  $\tau_0$  est un multiple entier de  $T_c$ , c'est-à-dire :

$$\tau_0 = \tilde{\ell}_0 T_c \quad (3.16)$$

avec  $0 \leq \tilde{\ell}_0 < MN\tilde{L}$ .

De plus, chaque récurrence contient  $N\tilde{L}$  échantillons d'après (3.8). Également illustré sur la figure 3.5, le vecteur colonne  $\tilde{\mathbf{z}}$  qui contient les  $MN\tilde{L}$  échantillons  $\tilde{z}(0), \dots, \tilde{z}((M-1)T_r + (N\tilde{L}-1)T_c)$ . Pour cela, on rappelle que :

$$\chi_{\Pi_{T_c}}(\tilde{\ell}T_c, 0) = \begin{cases} 1 & \tilde{\ell} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.17)$$

Dans ce cas, en utilisant les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^{MN\tilde{L}}$  notés  $(\tilde{\mathbf{e}}_l)_{l=1,\dots,MN\tilde{L}}$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}$  vérifie :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \tilde{z}(0) \\ \vdots \\ \tilde{z}((M-1)T_r + (N\tilde{L}-1)T_c) \end{bmatrix} \\
 &= \alpha \chi_{\Pi_{T_c}}(0, 0) \left[ c_0(d_0\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+1} + d_1\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+2} + \dots + d_{N-1}\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+N}) \right. \\
 &\quad + c_1(d_0\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+N\tilde{L}+1} + d_1\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+N\tilde{L}+2} + \dots + d_{N-1}\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+N\tilde{L}+N}) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad \left. + c_{M-1}(d_0\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+(M-1)N\tilde{L}+1} + d_1\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+(M-1)N\tilde{L}+2} + \dots + d_{N-1}\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+(M-1)N\tilde{L}+N}) \right] + \tilde{\mathbf{v}} \\
 &= \alpha \chi_{\Pi_{T_c}}(0, 0) \sum_{m=0}^{M-1} c_m \left( \sum_{n=0}^{N-1} d_n \tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+mN\tilde{L}+n+1} \right) + \tilde{\mathbf{v}} \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathbf{v}} = [v(0), v(T_c), \dots, v((M-1)T_r + (N\tilde{L}-1)T_c)]^T$ .

L'ensemble des perturbations additives  $\tilde{\mathbf{v}}$  est un vecteur gaussien coloré de matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{M}}$  donnée par :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^H] = \tilde{\mathbf{\Gamma}} + \sigma^2 \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} \tag{3.19}$$

avec  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$  la matrice de covariance du fouillis et  $\sigma^2$  la variance du bruit thermique.

A ce stade, pour faciliter la lecture des calculs, on écrit  $\tilde{\mathbf{z}}$  à partir de la matrice de « décalage »  $\tilde{\mathbf{J}}$  de taille  $MN\tilde{L} \times MN\tilde{L}$  contenant des « 1 » sur la première sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. Cette matrice a les propriétés suivantes : soit  $\mathbf{A}$  une matrice de taille  $MN\tilde{L} \times MN\tilde{L}$  définie à partir de ses vecteurs lignes  $\mathbf{r}_i$  et ses vecteurs colonnes  $\mathbf{c}_i$  comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{MN\tilde{L}} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_{MN\tilde{L}}] \tag{3.20}$$

On a :

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,MN\tilde{L}} \\ \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{MN\tilde{L}-1} \end{bmatrix} \quad (\tilde{\mathbf{J}})^H \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{MN\tilde{L}} \\ \mathbf{0}_{1,MN\tilde{L}} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

et :

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{J}} = [\mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_{MN\tilde{L}} \ \mathbf{0}_{MN\tilde{L},1}] \quad \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{J}})^H = [\mathbf{0}_{MN\tilde{L},1} \ \mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_{MN\tilde{L}-1}] \tag{3.22}$$

avec  $\mathbf{0}_{1,MN\tilde{L}}$  le vecteur de taille  $1 \times MN\tilde{L}$  ne contenant que des zéros.

En particulier pour  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{e}}_1$ , on en déduit que :

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0+mN\tilde{L}+n+1} = \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0+mN\tilde{L}+n} \tilde{\mathbf{e}}_1, \quad \tilde{\ell}_0 = 0, \dots, MN\tilde{L} - 1 \tag{3.23}$$



Étant donné (3.23), la double somme dans (3.18) vérifie :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} c_m \sum_{n=0}^{N-1} d_n \tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{\ell}_0 + mN\tilde{L} + n+1} &= \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \sum_{m=0}^{M-1} c_m \sum_{n=0}^{N-1} d_n \tilde{\mathbf{e}}_{mN\tilde{L} + n+1} \\ &= \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec  $\mathbf{e}_1$  le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{\tilde{L}}$  et  $\otimes$  le produit de Kronecker de deux vecteurs.

En insérant (3.24) dans (3.18), on aboutit à :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \alpha_{\chi_{\Pi_{T_c}}}(0, 0) \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) + \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.25)$$

### c) Blanchiment et filtrage adapté

Dans le cas où la perturbation est un bruit gaussien coloré de matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{M}}$  connue, et d'après la partie 2.2.2, le traitement issu du GLRT consiste en une première étape de blanchiment du bruit suivie d'un filtrage adapté au signal blanchi. Le signal reçu après traitement est une fonction de la position inconnue de la cible  $\tilde{\ell}_0$  et de l'entier  $\tilde{\ell} \in \llbracket 0, MN\tilde{L}-1 \rrbracket$  qui représente l'hypothèse que la cible est dans la case distance  $\tilde{\ell}$ . Ce signal peut alors s'écrire comme suit :

$$\tilde{\mathbf{z}}^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.26)$$

En remplaçant  $\tilde{\mathbf{z}}$  par son expression (3.25), (3.26) devient :

$$\tilde{\mathbf{z}}^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) = \alpha_{\chi_{\Pi_{T_c}}}(0, 0) \tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) + \tilde{\mathbf{v}}^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.27)$$

où  $\tilde{r}$  est la fonction définie par :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.28)$$

A ce stade, nous disposons d'une expression du signal reçu après traitement où la matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{M}}$  du fouillis et du bruit thermique est supposée connue. En vue d'analyser la robustesse de la sélection des codes de phases à la variation de fouillis, nous proposons de modéliser le fouillis gaussien par un modèle AR. Nous développons alors l'expression de  $\tilde{r}$  en fonction des paramètres AR, puis exprimons les critères à optimiser.

#### 3.3.2.2 Analyse du signal reçu pour un fouillis modélisé par un processus AR(p)

Soit le fouillis  $x$  modélisé par un processus<sup>19</sup> AR d'ordre  $p$ , noté AR(p) :

$$x_l = \sum_{i=1}^p a_i x_{l-i} + u_l \quad (3.29)$$

avec  $u_l$  un bruit blanc gaussien complexe centré de variance  $\sigma_u^2$  et  $\{a_i\}_{i=1, \dots, p}$  les paramètres AR.

Pour que les valeurs prises par le processus AR ne divergent pas, certaines conditions doivent être satisfaites. Ainsi, parmi les critères de stabilité que l'on peut utiliser, on peut citer celui qui

19. On note que  $x_l$  peut être vu comme la sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle infinie dont l'entrée est  $u_l$  et dont la fonction de transfert est donnée par  $H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^p (1 - p_i z^{-i})}$  avec  $p_i$  les pôles de  $H(z)$ .

consiste à sélectionner les pôles à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe et en déduire les paramètres AR, par exemple  $|a_1| < 1$  pour un AR(1). Dans certains cas, on peut également analyser directement les paramètres AR. Ainsi, pour un processus AR(2) par exemple,  $a_1$  et  $a_2$  doivent être dans le triangle de stabilité [NAJ06].

Concernant l'expression analytique de l'inverse de la matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ , elle est définie par [CER91] :

$$\tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} (\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H) \quad (3.30)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^n \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{I}_{MN\tilde{L}}$  est la matrice identité de taille  $MN\tilde{L} \times MN\tilde{L}$ , et :

$$\tilde{\mathbf{G}} = - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-n} \quad (3.32)$$

Sous l'hypothèse que la puissance du bruit thermique est négligeable devant celle du fouillis, c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathbf{M}} \approx \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.33)$$

la fonction  $\tilde{r}$  devient, à partir de (3.27), (3.30) et (3.33) :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) \approx \frac{1}{\sigma_u^2} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H (\tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0})^H (\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H) \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.34)$$

Pour analyser  $\tilde{r}$ , on commence par développer l'expression de  $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ . On montre en annexe C.1 que le produit  $\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H = & \left[ \left( 1 + \sum_{n=1}^p a_n^2 \right) \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^n - \sum_{n=1}^p a_n (\tilde{\mathbf{J}}^n)^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l (\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} \right] \\ & - \left[ \sum_{n=1}^p a_n^2 \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_{k+l-n}^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k+n-l} \tilde{\mathbf{e}}_k^H \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

On pose alors :

$$\mathbf{A}_1 = \left( 1 + \sum_{n=1}^p a_n^2 \right) \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^n - \sum_{n=1}^p a_n (\tilde{\mathbf{J}}^n)^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l (\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} \quad (3.36)$$

et :

$$\mathbf{A}_2 = \sum_{n=1}^p a_n^2 \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_{k+l-n}^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k+n-l} \tilde{\mathbf{e}}_k^H \quad (3.37)$$

Quant au produit  $\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H$ , il peut se mettre sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H = \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \sum_{k=1}^{\min(n,l)} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-n+k} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-l+k}^H \quad (3.38)$$

En insérant (3.35) et (3.38) dans (3.34), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) &\approx \frac{1}{\sigma_u^2} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \left( \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^H \right) \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \\
 &= \frac{1}{\sigma_u^2} \left[ (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \right. \\
 &\quad \left. - (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \left( \mathbf{A}_2 + \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^H \right) \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma_u^2} [\tilde{r}_1(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) - \tilde{r}_2(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0)]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

avec :

$$\tilde{r}_1(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \tag{3.40}$$

et :

$$\tilde{r}_2(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \left( \mathbf{A}_2 + \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^H \right) \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \tag{3.41}$$

Dans la suite, on veut montrer les deux propriétés suivantes :

1.  $\tilde{r}_1$  ne dépend que de la différence  $\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0$ . Ce caractère stationnaire est d'intérêt puisque nous ne connaissons pas la position  $\tilde{\ell}_0$  de la cible ;
2.  $\tilde{r}_2$  est nulle sous certaines conditions.

Pour le développement de ces deux fonctions, on utilise la fonction d'autocorrélation  $r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}$  du code de phase  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}$  qui peut s'écrire :

$$r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \ell) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \tag{3.42}$$

#### a) Développement du terme $\tilde{r}_1$

En remplaçant  $\mathbf{A}_1$  par son expression (3.36) dans (3.40), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_1(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) &= \left( 1 + \sum_{n=1}^p a_n^2 \right) (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^p a_n (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{J}}^n \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^p a_n (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^n \right)^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{l-n} \right)^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \\
 &\quad + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

(3.43) peut également s'écrire en fonction de  $r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}$  définie en (3.42). Il vient alors :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = & \left(1 + \sum_{n=1}^p a_n^2\right) r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) - \sum_{n=1}^p a_n r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} - n) - \sum_{n=1}^p a_n r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + n) \\ & + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + l - n) + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + l - n) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Après réarrangement des termes, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = & r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) - \sum_{n=1}^p a_n \left( r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} - n) + r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + n) \right) \\ & + \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + l - n) \end{aligned} \quad (3.45)$$

En introduisant la variable  $\lambda = \tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}$ ,  $\tilde{r}_1(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0)$  devient :

$$\tilde{r}_1(\lambda) = \sum_{n=-p}^p \alpha_n r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\lambda + n) \quad (3.46)$$

avec :

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 + \sum_{l=1}^p a_l^2 & n = 0 \\ -a_{|n|} + \sum_{l=1}^{p-|n|} a_l a_{l+|n|} & 0 < |n| \leq p-1 \\ -a_p & |n| = p \end{cases} \quad (3.47)$$

Remarque :  $\tilde{r}_1$  peut s'interpréter comme la corrélation de la séquence  $(\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})$  filtrée par un filtre RIF causal de réponse impulsionnelle  $[1 \ -a_1 \ \dots \ -a_p]$ .

Enfin, on montre en annexe C.2 que  $r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}$  vérifie :

$$r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(i) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{\mathbf{d}}(i - mN\tilde{L}) r_{\mathbf{c}}(m) \quad (3.48)$$

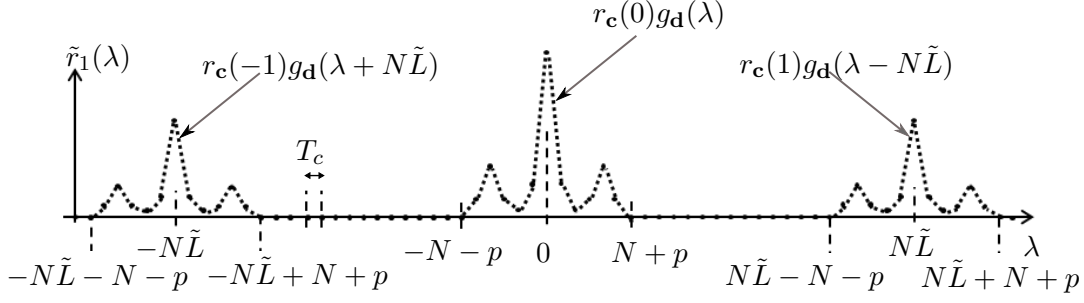
avec  $r_{\mathbf{c}}$  et  $r_{\mathbf{d}}$  les fonctions d'autocorrélation des codes de phase  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  respectivement.

Dans ce cas, en incluant (3.48) dans (3.46), on aboutit à :

$$\tilde{r}_1(\lambda) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{\mathbf{c}}(m) \sum_{n=-p}^p \alpha_n r_{\mathbf{d}}(\lambda + n - mN\tilde{L}) \quad (3.49)$$

En introduisant la fonction  $g_{\mathbf{d}}(\lambda) = \sum_{n=-p}^p \alpha_n r_{\mathbf{d}}(\lambda + n)$ , il vient :

$$\tilde{r}_1(\lambda) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{\mathbf{c}}(m) g_{\mathbf{d}}(\lambda - mN\tilde{L}) \quad (3.50)$$


 FIGURE 3.6 – Exemple de représentation de  $\tilde{r}_1$ 

A ce stade, regardons les propriétés de  $\tilde{r}_1(\lambda)$  : puisque  $\mathbf{d}$  est de taille  $N$ ,  $r_{\mathbf{d}}(\lambda) = 0$  lorsque  $|\lambda| \geq N$ . Ainsi,  $g_{\mathbf{d}}(\lambda) = 0$  lorsque  $|\lambda| \geq N + p$ . Tant que<sup>20</sup>  $\tilde{L} \geq 3$  et  $N \geq 2p$ , il n'y a pas de chevauchement entre les motifs  $g_{\mathbf{d}}(\lambda - mN\tilde{L})$ ,  $m = -M + 1, \dots, M - 1$ , Cf. Fig. 3.6.

Comme illustré sur la Fig. 3.6, le signal reçu issu de la  $k^{\text{ième}}$  récurrence est proportionnel à  $r_{\mathbf{c}}(k)$ .

De plus, d'après (3.50), pour  $|\lambda| \leq N + p$ , on a  $\tilde{r}_1(\lambda) = M g_{\mathbf{d}}(\lambda)$  et seule la fonction d'auto-corrélation du code  $\mathbf{d}$  intervient. Ces deux propriétés sont utilisées par la suite.

### b) Développement du terme $\tilde{r}_2$

D'après (3.41),  $\tilde{r}_2$  est défini à partir de  $\mathbf{A}_2$  et de  $\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H$  comme suit :

$$\tilde{r}_2(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \left( \mathbf{A}_2 + \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H \right) \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.41)$$

où l'on rappelle que :

$$\mathbf{A}_2 = \sum_{n=1}^p a_n^2 \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_{k+l-n}^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k+n-l} \tilde{\mathbf{e}}_k^H \quad (3.37)$$

et :

$$\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H = \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \sum_{k=1}^{\min(n,l)} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-n+k} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-l+k}^H \quad (3.38)$$

Dans la suite, en incluant (3.37) et (3.38) dans (3.41), nous identifions quatre produits scalaires différents à calculer pour  $k = 1, \dots, p$  :

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (3.51)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_k^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.52)$$

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-k} \quad (3.53)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-k}^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.54)$$

D'après les propriétés de la matrice  $\tilde{\mathbf{J}}$ , le produit scalaire (3.51) vérifie :

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{e}}_k = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \tilde{\mathbf{e}}_{k-\tilde{\ell}_0}, \quad k = 1, \dots, p \quad (3.55)$$

20. Pour ne pas avoir de recouvrement des motifs  $g_{\mathbf{d}}(\lambda - mN\tilde{L})$ , il faut que  $N + p \leq N\tilde{L} - N - p$ , Cf. Fig. 3.6. Cela revient à avoir  $2(1 + \frac{p}{N}) \leq \tilde{L}$ . En imposant  $N \geq 2p$ , on a  $2(1 + \frac{p}{N}) \leq 3$ , et en prenant  $\tilde{L} \geq 3$ , la condition de non-chevauchement est vérifiée.

Si  $\tilde{\ell}_0 \geq p$ , alors :

$$\left(\tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0}\right)^H \tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{0}_{MN\tilde{L},1} \quad (3.56)$$

Autrement dit, (3.55) est nul si la cible ne se situe pas dans les  $p$  premières cases distance.

Le même raisonnement s'applique à (3.52), c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathbf{e}}_k^H \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) = 0 \quad (3.57)$$

si  $\tilde{\ell} \geq p$ .

Le produit scalaire (3.53) s'écrit :

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left(\tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0}\right)^H \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-k} = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-k-\tilde{\ell}_0}, \quad k = 1, \dots, p \quad (3.58)$$

Sachant que les  $N\tilde{L} - N$  derniers échantillons du vecteur  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}$  valent zéro, le produit scalaire (3.58) vaut zéro si  $\tilde{\ell}_0 < N\tilde{L} - N - p$ , c'est-à-dire si la cible ne se situe pas dans les  $N + p$  dernières cases distance de chaque récurrence.

Si la cible est située au delà de la distance ambiguë, par exemple si  $N\tilde{L} \leq \tilde{\ell}_0 \leq 2N\tilde{L} - 1$ , alors le produit scalaire (3.58) est nul si  $N\tilde{L} \leq \tilde{\ell}_0 < 2N\tilde{L} - N - p$ . On peut généraliser ce résultat pour chacune des  $M$  récurrences.

Pour le produit scalaire (3.54), le raisonnement est identique.

En résumé, sachant les différents produits de produit scalaire dans (3.41),  $\tilde{r}_2(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell})$  est nul lorsque  $\tilde{\ell}$  ou  $\tilde{\ell}_0 \in \{[p; N\tilde{L} - 1 - N - p] \cup [mN\tilde{L}; mN\tilde{L} - 1 - N - p], m \in [1; M - 1]\}$ , Cf. Fig. 3.7.

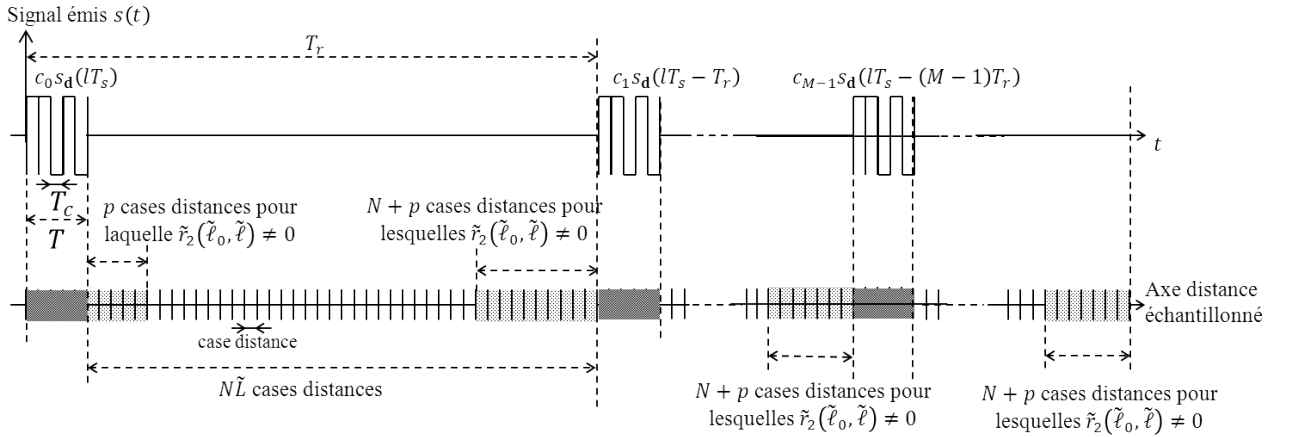


FIGURE 3.7 – Positions  $\tilde{\ell}_0$  de la cible pour lesquelles  $\tilde{r}_2(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}) = 0$

Dans la suite, on fait l'hypothèse que la cible n'est ni sur les  $p$  premières cases distance de la première récurrence, ni sur les  $N + p$  dernières cases distance de chaque récurrence. Ainsi, la signal reçu après traitement s'écrit :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}) \approx \frac{1}{\sigma_u^2} \tilde{r}_1(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) \quad (3.59)$$

Étant donné l'approximation de  $\tilde{r}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell})$  en (3.59) et l'expression (3.50) de  $\tilde{r}_1$ , il s'agit à présent de sélectionner les codes intra et inter-impulsion.

### 3.3.2.3 Sélection des codes intra et inter-impulsion

D'après (3.59) et l'expression (3.50) de  $\tilde{r}_1$ , le signal reçu après traitement est constitué des différents motifs  $g(\lambda - mN\tilde{L})$ ,  $m = -M + 1, \dots, M - 1$  pondérés par les coefficients de la fonction d'autocorrélation  $r_c(m)$ . Le code **c** a donc une influence de récurrence à récurrence alors que le code **d** a un impact sur le motif  $g_d(\lambda)$ . Pour cette raison, l'optimisation du signal reçu après traitement sur les deux variables **c** et **d** peut être séparée en deux problèmes d'optimisation indépendants.

Ainsi, on peut sélectionner le code **c** pour augmenter la distance ambiguë d'un facteur  $Q \leq M$ . En effet, dans le cas où il n'y a pas de modulation inter-impulsion, les ambiguïtés distance sont dues au fait qu'en présence d'une perturbation additive sur le signal reçu, il n'est pas possible de distinguer le motif central  $g_d$  des motifs adjacents situés tous les  $T_r$ . Toutefois, la modulation inter-impulsion pondère les motifs  $g_d$ . Une façon de doubler la distance ambiguë consiste alors à choisir un code **c** tel que sa fonction d'autocorrélation vérifie  $r_c(-1) = 0$  par exemple, Cf. Fig. 3.8.

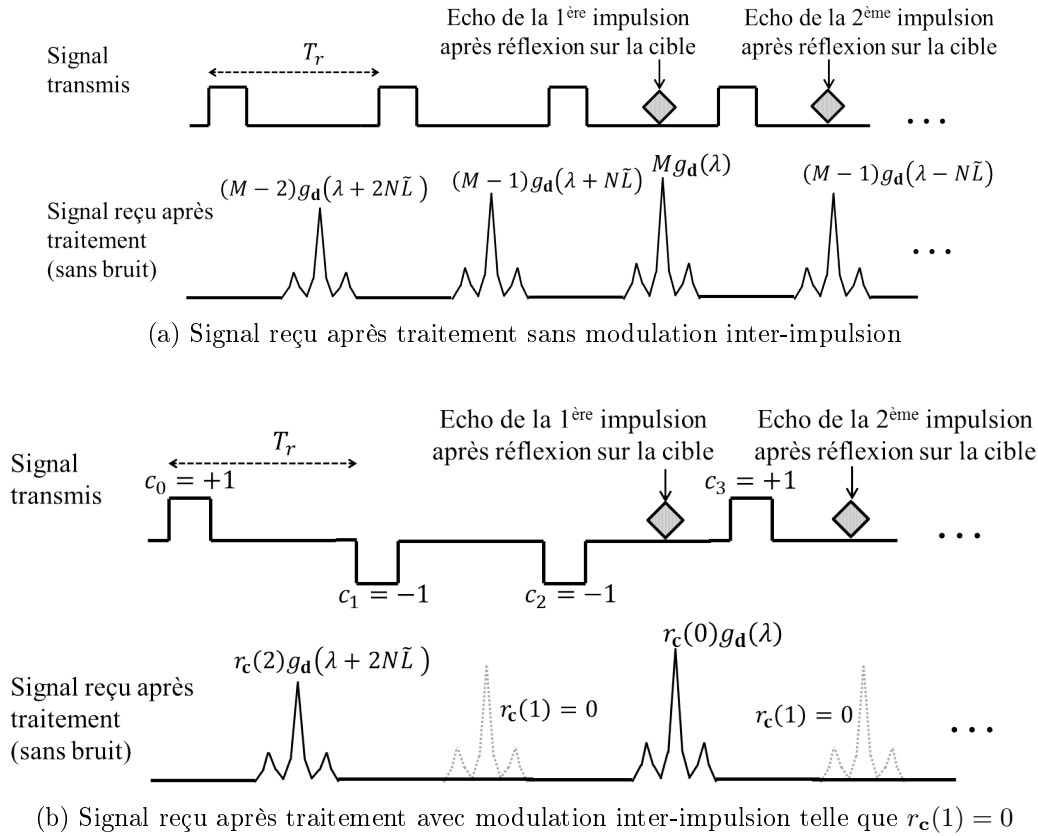


FIGURE 3.8 – Principe de l'augmentation de la distance ambiguë avec une modulation de phase inter-impulsion

Pour multiplier la distance ambiguë par un facteur  $Q$ , il suffit que la fonction d'autocorrélation  $r_c$  vérifie :

$$r_c(-q) = 0, \quad q = 1, \dots, Q - 1 \quad (3.60)$$

Pour supprimer les ambiguïtés distance, il faudrait avoir  $Q = M$ . Cependant, parmi la famille des codes binaires, un code vérifiant (3.60) avec  $Q = M$  n'existe pas. On pourrait alors se contenter

de  $Q < M$  mais il n'y a pas un tel code sauf<sup>21</sup> pour  $Q=2$ . Parmi les alternatives possibles, l'utilisateur peut choisir de relâcher la contrainte (3.60) en prenant par exemple :

$$r_{\mathbf{c}}(-q) \leq 1, \quad q = 1, \dots, Q-1 \quad (3.61)$$

Les codes de Barker vérifient cette contrainte, mais leur taille n'excède pas 13. Pour  $13 < M \leq 105$ , on peut s'orienter vers les codes dit « MPSL » pour *minimum peak sidelobe ratio* qui minimisent l'écart entre la hauteur du lobe principal et le lobe secondaire le plus haut [NUN08]. Pour des longueurs supérieures à 105, on peut chercher le code tel que ses lobes secondaires sont inférieurs à un niveau fixé *a priori* par l'utilisateur. Toutefois, il faudrait effectuer une recherche exhaustive dont le coût calculatoire est élevée.

Quant au code intra-impulsion, nous analysons l'optimisation sur le code  $\mathbf{d}$  des trois critères suivants relatifs à  $\tilde{r}_1$  :

- critère 1 : la maximisation de la hauteur du lobe principal, ce qui est équivalent à maximiser la PD, comme le suggère [DE 08],
- critère 2 : la minimisation de la largeur du lobe principal du signal reçu après traitement ; cela revient à avoir la résolution en distance la plus fine,
- critère 3 : la minimisation de la hauteur des lobes secondaires du signal reçu après traitement : cela correspond à réduire les fausses détections.

Pour le premier critère, maximiser la PD revient à maximiser :

$$\tilde{r}_1(0) = r_{\mathbf{c}}(0)g_{\mathbf{d}}(0) = Mg_{\mathbf{d}}(0) \quad (3.62)$$

Pour les deux autres critères, ils sont équivalents à minimiser la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires de  $g_{\mathbf{d}}$ . Nous proposons alors de regrouper ces trois critères dans un problème d'optimisation multi-objectifs pour sélectionner le code  $\mathbf{d}$ .

Il existe différentes approches pour optimiser simultanément plusieurs critères et obtenir l'ensemble des solutions « optimales ». Dans notre cas, un code de phase est qualifié d'optimal s'il fait partie des solutions « non-dominées », c'est-à-dire qui sont telles qu'elles améliorent un ou plusieurs critères sans dégrader les autres. L'ensemble des solutions non-dominées est appelé « front de Pareto » et il est noté  $\mathcal{P}_1$ . A titre d'illustration, on représente le front de Pareto sur la figure 3.9 dans le cas où il y a deux critères à maximiser. On note  $\mathbf{d}^{(i)}, i = 0, \dots, 2^N - 1$  les codes de phases de l'ensemble  $\mathcal{S}_N$  des codes binaires de taille  $N$ .  $\mathbf{d}^{(i)}$  s'obtient à partir de la valeur de  $i$  écrit en binaire sur  $N$  bits en remplaçant les 0 par  $-1$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(0)} &= [ -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1 ]^T \\ \mathbf{d}^{(1)} &= [ -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad 1 ]^T \\ &\vdots \\ \mathbf{d}^{(2^N-1)} &= [ 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 ]^T \end{aligned} \quad (3.63)$$

Comme représenté sur la figure 3.9, le front de Pareto  $\mathcal{P}_1$  contient l'ensemble des codes qui réalisent les meilleurs compromis entre les deux critères.

---

21. Pour  $Q = 2$ , il existe des codes vérifiant  $r_{\mathbf{c}}(-1) = 0$ . Sinon, supposons  $Q > 2$  et  $M$  pair. Dans ce cas,  $r_{\mathbf{c}}(-1)$  correspond à la somme de  $M-1$  termes valant  $\pm 1$  et une telle somme ne peut être égale à 0. Si  $M$  est impair, le même raisonnement tient pour  $r_{\mathbf{c}}(-2)$ .



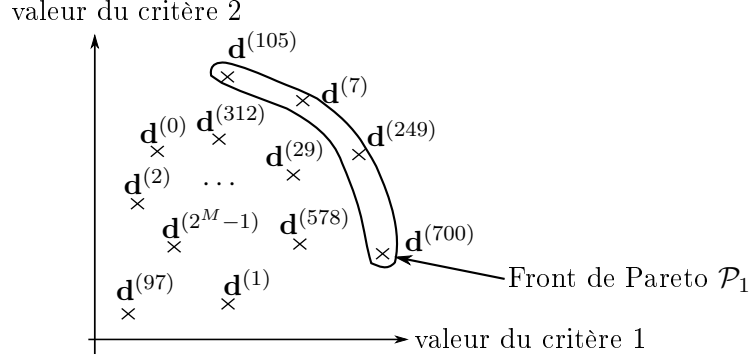


FIGURE 3.9 – Exemple de représentation de front de Pareto en deux dimensions

Parmi les méthodes d'optimisation multi-objectifs existantes, la méthode dite de « scalairisation » consiste à optimiser une combinaison linéaire des différents critères [EHR05]. D'après [EHR05], quelle que soit la combinaison linéaire, la solution appartient au front de Pareto. On pourrait également envisager la méthode dite « *contrainte* –  $\epsilon$  » ( $\epsilon$ -*constraint* en anglais) [CHA83, cité par [EHR05]] où il s'agit d'optimiser un des critères sous les contraintes que les autres critères sont inférieurs à un seuil  $\epsilon$ . Toutefois, comme pour la méthode de scalairisation, il faut soit supposer un *a priori* sur l'importance des critères pour choisir le critère à optimiser, soit effectuer plusieurs optimisations en changeant le critère à optimiser, mais cela ne garantit pas d'aboutir à  $\mathcal{P}_1$ . Enfin, il existe des méthodes heuristiques [COE07], mais elles ne garantissent pas d'obtenir toutes les solutions optimales de  $\mathcal{P}_1$ .

Dans le cadre de cette thèse, nous choisissons de calculer le front de Pareto  $\mathcal{P}_1$  en parcourant de manière exhaustive l'ensemble  $\mathcal{S}_N$  des codes de phase candidats et en conservant les solutions non-dominées. Cette méthode ne suppose pas *a priori* sur l'importance des critères et présente l'avantage d'aboutir au front de Pareto et non à un de ses sous-ensembles. On note toutefois que le nombre d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{S}_N$  peut être très grand en fonction de la longueur  $N$  des codes considérés. En effet, dans le cas de codes polyphases où les phases sont dans un alphabet de taille  $q$  finie,  $\mathcal{S}_N$  contient  $q^N$  éléments. Dans le cas de notre étude, nous considérons des codes binaires, et pour réduire le coût calculatoire, on peut trouver des relations de symétrie sur les critères. En effet, les trois critères considérés portent sur le signal reçu non-bruité après traitement  $\tilde{r}$  défini par (3.27) :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.27)$$

Dans (3.27), on note que considérer  $\mathbf{d}$  ou  $-\mathbf{d}$  ne change pas l'expression de  $\tilde{r}$ . Dans ce cas, on peut réduire l'espace de recherche  $\mathcal{S}_N$  de  $2^N$  éléments à  $2^{N-1}$  éléments.

Dans le prochain paragraphe, on applique cette méthode à la sélection du code  $\mathbf{d}$ .

### Description de la méthode de sélection du code $\mathbf{d}$

Afin d'étudier la robustesse des codes de phases optimaux, on définit les fronts de Pareto de deuxième et troisième ordre  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  comme les ensembles des solutions non-dominées parmi  $\mathcal{S}_N \setminus \mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{S}_N \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$  respectivement. Nous calculons alors  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  pour différentes valeurs des paramètres AR regroupées dans l'ensemble  $\mathcal{D}$ . Ensuite, nous calculons le pourcentage de

présence de chaque code  $\mathbf{d}$  dans les ensembles  $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ ,  $\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{P}_3(\mathcal{D})$ .

*Exemple :* Le fouillis est modélisé par un modèle AR d'ordre  $p$  et  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des paramètres  $a_1, \dots, a_p$  considérés tels que le processus AR soit stable. Pour un jeu de paramètres  $a_1, \dots, a_p$  donné, nous déterminons les codes  $\mathbf{d}^{(i)}$  présents dans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ . On fait alors varier les paramètres  $a_1, \dots, a_p$  et on recalcule les trois fronts de Pareto. En considérant l'ensemble des valeurs des paramètres  $(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{D}$ , on peut déduire pour chaque code  $\mathbf{d}^{(i)}$  des pourcentages de présence notés  $p_1^{(i)}$ ,  $p_2^{(i)}$  et  $p_3^{(i)}$  dans les fronts de Pareto  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  respectivement et identifier les codes les plus robustes à des variations de fouillis.

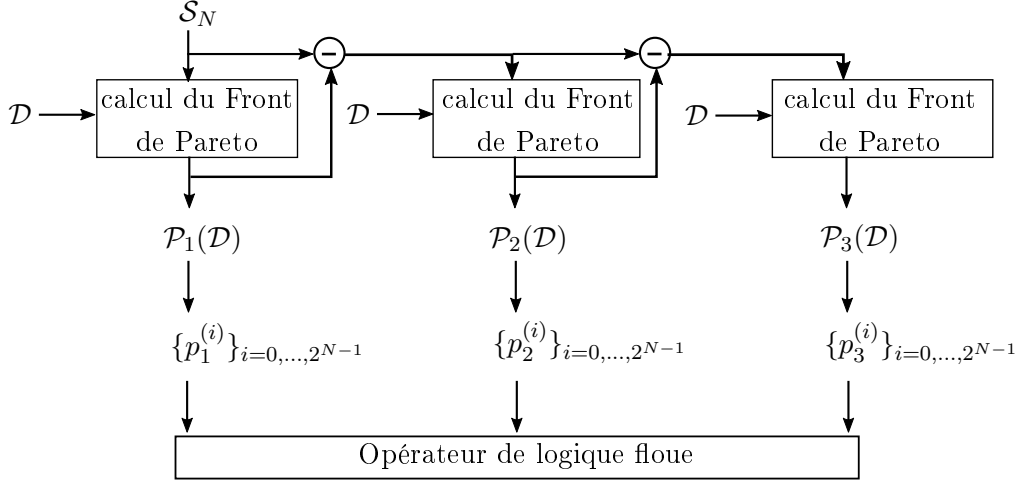


FIGURE 3.10 – Schéma de principe de la méthode de sélection du code intra-impulsion

Pour combiner  $p_1^{(i)}$ ,  $p_2^{(i)}$  et  $p_3^{(i)}$  avec  $i = 0, \dots, 2^N-1$ , nous proposons d'utiliser un opérateur de logique floue. Il en existe différents types [Li04] : les opérateurs pessimistes tels que la fonction *min*, les opérateurs de renforcement qui visent à mettre en exergue la présence d'un code sur les fronts de Pareto, etc. Nous avons finalement opter pour un opérateur neutre tel que la somme pondérée. Les poids sont choisis de telle sorte à mettre en avant l'importance des codes appartenant à  $\mathcal{P}_1$  par rapport à  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_2$  par rapport à  $\mathcal{P}_3$ .

Disposant d'une méthode de sélection des codes inter et intra-impulsion dans un contexte mono-résolution, nous proposons de l'adapter au système bi-résolution. Cette première approche pour la sélection des codes inter et intra-impulsion robustes au fouillis dans un contexte mono-résolution a donné lieu à [ROU15a].

### 3.3.3 Optimisation dans un cas bi-résolution

Les radars actuels sont multi-fonctions et pour chaque fonction, une forme d'onde spécifique est utilisée. Toutefois, certaines fonctionnalités haute résolution nécessitent un temps d'éclairement suffisamment long pouvant perturber les poursuites des autres cibles et la veille. C'est le cas notamment de l'identification de cible à partir de sa signature Doppler puisque la résolution en fréquence Doppler est d'autant plus fine que le temps d'illumination de la cible est long. Pour pallier cet inconvénient, une solution consiste à utiliser une forme d'onde unique pour tous les modes. Étant donné la diversité des formes d'onde utilisées pour réaliser les différentes fonctions,

nous avons orienté notre étude sur les fonctions de détection basse résolution et haute résolution.

La plupart des articles qui traitent de la détection multi-résolution en radar font référence à du traitement d'image avec l'utilisation d'une décomposition en ondelettes par exemple [BHA09]. A notre connaissance, seuls Shinriki *et al.* étudient cette problématique. Dans [SHI06], ils proposent d'utiliser un ensemble de filtres dont les réponses impulsionnelles permettent de piloter la résolution. Toutefois, Levanon reproche à cette approche qu'il faut un fort RSB pour compenser les pertes en RSB induites par les filtres désadaptés [LEV07]. Dans [SHI12], les auteurs considèrent des filtres inverses dont la réponse impulsionnelle permet de déterminer la résolution d'une part, et les lobes secondaires d'autre part.

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons une autre approche fondée sur une forme d'onde hybride du type train d'impulsions codées en phase identique à la forme d'onde introduite dans la section précédente. Pour réduire le coût calculatoire de la chaîne globale de traitement, nous procédons comme suit : le signal reçu est premièrement traité dans une chaîne de traitement basse résolution. S'il y a une détection, les échantillons du signal reçu sont réutilisés pour être traités dans la voie de traitement haute résolution, Cf. Fig. 3.11.

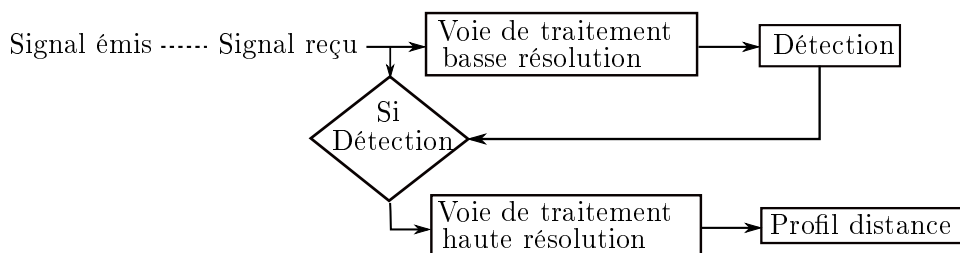


FIGURE 3.11 – Principe du système bi-résolution

Pour la chaîne de traitement haute résolution, nous réutilisons celle qui a été introduite dans la section précédente, Cf. Fig. 3.4. En s'appuyant sur le traitement proposé dans [DE 08], la chaîne de traitement basse résolution est constituée d'une première étape de filtrage passe-bas avec le filtre de réponse impulsionnelle  $\mathbf{D}_f \mathbf{s}_d(\tau)$ . Le signal filtré est ensuite échantillonné à  $T_s = T$ . La troisième étape consiste à effectuer un blanchiment puis un filtre adapté au signal blanchi. Les chaînes de traitement basse et haute résolution sont représentées sur la figure 3.12.

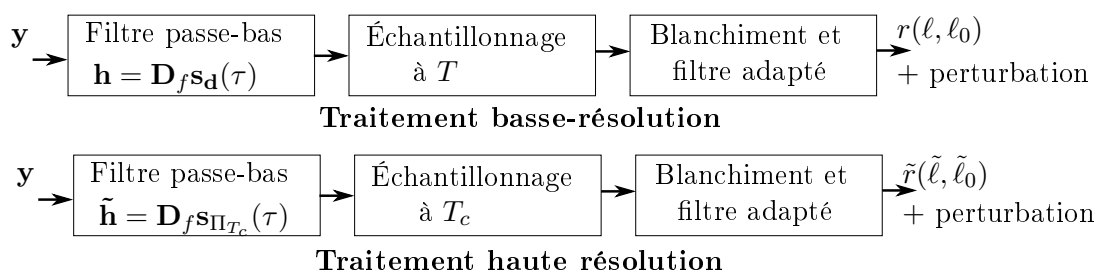


FIGURE 3.12 – Chaînes de traitement basse et haute résolution

On rappelle que le signal émis  $s$  considéré est un train de  $M$  impulsions codées en phase alliant un code de phase binaire intra-impulsion et un code de phase binaire inter-impulsion. La

définition du signal  $s$  est rappelée ici :

$$s(lT_s) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m s_{\mathbf{d}}(lT_s - mT_r) \quad (3.4)$$

où  $c_m = \pm 1$  est la  $m^{\text{ième}}$  impulsion du code inter-impulsion  $\mathbf{c}$  de longueur  $M$  et  $s_{\mathbf{d}}$  est l'impulsion de durée  $T$  telle que :

$$s_{\mathbf{d}}(lT_s) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \Pi_{T_c}(lT_s - nT_c) \quad (3.5)$$

avec  $d_n = \pm 1$  le  $n^{\text{ième}}$  élément du code de phase intra-impulsion  $\mathbf{d}$  de longueur  $N$  et  $\Pi_{T_c}$  la porte de durée  $T_c$  définie en (3.6).

Comme pour le cas mono-résolution, nous utilisons le modèle bande étroite (2.1) d'une cible ponctuelle pour le signal reçu  $\mathbf{y}$  :

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{b} + \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Dans le cas de la voie de traitement haute résolution, nous avons vu que le signal reçu en sortie du traitement décrit sur la figure 3.12 s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{z}}^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.26)$$

où  $\tilde{\mathbf{z}}$  contient les échantillons du signal reçu après le filtrage passe-bas puis l'échantillonnage à  $T_c$ .

En remplaçant  $\tilde{\mathbf{z}}$  par son expression (3.25), (3.26) devient :

$$\alpha \chi_{\Pi_{T_c}}(0, 0) \tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) + \tilde{\mathbf{v}}^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.27)$$

où  $\tilde{r}$  est donnée par :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.28)$$

Dans le cas haute-résolution, nous avons défini trois critères à optimiser relatifs à  $\tilde{r}$ . Il s'agit à présent de décliner ces critères pour la voie basse résolution. Pour cela, nous analysons premièrement le signal reçu en sortie du traitement basse résolution ; puis, nous présentons le problème d'optimisation associé.

### 3.3.3.1 Expressions du signal reçu après le traitement basse résolution

Le traitement basse résolution s'inspire de la voie de traitement haute résolution à la différence que le filtrage passe-bas et la période d'échantillonnage diffèrent. Nous réutilisons donc les étapes de la section précédente du cas mono-résolution pour le développement d'une expression du signal reçu après traitement basse résolution.

#### a) Signal reçu après filtrage passe-bas

Le signal reçu est premièrement filtré par le filtre passe-bas de réponse impulsionnelle  $\mathbf{D}_f \mathbf{s}_{\mathbf{d}}(\tau)$ . Le signal reçu filtré  $z$  s'écrit alors comme suit :

$$z(\tau, f) = \mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{D}_f^H \mathbf{y} \quad (3.64)$$

Comme pour le cas de la haute résolution, on peut développer (3.64) en remplaçant  $\mathbf{y}$  par son expression (2.1).  $z(\tau, f)$  dépend alors du signal émis  $\mathbf{s}(\tau_0)$  qui peut également s'écrire à partir de  $\mathbf{s}_{\mathbf{d}}$  comme suit :

$$\mathbf{s}(\tau_0) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m \mathbf{s}_{\mathbf{d}}(m\tilde{L}T + \tau_0) \quad (3.65)$$

Ainsi, en tenant compte de (3.65), et en supposant la fréquence Doppler  $f_0$  connue, on aboutit à :

$$\begin{aligned} z(\tau, f_0) &= \alpha \mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{D}_{f_0} \mathbf{s}(\tau_0) + \mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H (\mathbf{b} + \mathbf{u}) \\ &= \alpha \sum_{m=0}^{M-1} c_m \mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{s}_{\mathbf{d}}(\tau_0 + m\tilde{L}T) + \mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H (\mathbf{b} + \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dans (3.66),  $\mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{s}_{\mathbf{d}}(\tau_0 + m\tilde{L}T)$  correspond à la fonction d'ambiguïté  $\chi_{s_{\mathbf{d}}}$  du signal  $s_{\mathbf{d}}$  prise en  $(\tau - \tau_0 - m\tilde{L}T, 0)$ . Aussi, (3.66) peut se réécrire de la manière suivante :

$$z(\tau, f_0) = \alpha \sum_{m=0}^{M-1} c_m \chi_{s_{\mathbf{d}}}(\tau - m\tilde{L}T - \tau_0, 0) + v(\tau, f_0) \quad (3.67)$$

avec  $v$  la perturbation additive après filtrage contenant la contribution du fouillis et celle du bruit thermique.

*Remarque :* Afin de ne pas alourdir les notations, la dépendance en  $f_0$  est omise dans la suite du développement.

### b) Échantillonnage à $T_s = T$

Dans la voie de traitement basse résolution,  $\tau$  est échantillonné à  $T_s = T$ , c'est-à-dire  $\tau = \ell T$  avec  $\ell = 0, \dots, M\tilde{L} - 1$ . Dans ce cas, chaque récurrence contient  $\tilde{L}$  échantillons d'après (3.8). Par rapport à la voie haute résolution, le nombre de cases distance à tester est réduit du facteur  $N$ , ce qui réduit le coût calculatoire de la voie basse résolution par rapport à celui de la voie haute résolution.

Dans la suite, on suppose que  $\tau_0$  peut s'exprimer comme suit :

$$\tau_0 = \ell_0 T \quad (3.68)$$

avec  $\ell_0 \in \llbracket 0; M\tilde{L} - 1 \rrbracket$ .

De plus, pour faciliter la lecture des calculs, on introduit le vecteur colonne  $\mathbf{z}$  contenant les  $M\tilde{L}$  échantillons  $z(0), \dots, z((M-1)T_r + (\tilde{L}-1)T)$ . D'après (3.67) et en se rappelant que :

$$\chi_{s_{\mathbf{d}}}(lT, 0) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.69)$$

$\mathbf{z}$  vérifie :

$$\mathbf{z} = \alpha \chi_{s_{\mathbf{d}}}(0, 0) \mathbf{J}^{\ell_0} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1) + \mathbf{v} \quad (3.70)$$

où  $\mathbf{v} = [v(0), v(T), \dots, v((M-1)T_r + (\tilde{L}-1)T)]^T$ .

La perturbation  $\mathbf{v}$  est modélisée par un vecteur gaussien coloré de matrice de covariance  $\mathbf{M}$  donnée par :

$$\mathbf{M} = \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^H] = \mathbf{\Gamma} + \sigma^2 \mathbf{I}_{M\tilde{L}} \quad (3.71)$$

avec  $\mathbf{\Gamma}$  la matrice de covariance du fouillis et  $\sigma^2$  la variance du bruit thermique.

### c) Blanchiment et filtrage adapté

La dernière étape du traitement décrit par la figure 3.12 consiste en une phase de blanchiment du bruit suivie d'un filtrage adapté au signal blanchi. Dans ce cas, le signal après traitement s'écrit :

$$\mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^\ell (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1) \quad (3.72)$$

avec  $\ell \in \llbracket 0, M\tilde{L} - 1 \rrbracket$  traduisant l'hypothèse que la cible est dans la case distance  $\ell$ .

En remplaçant  $\mathbf{z}$  par son expression (3.70), (3.72) devient :

$$\mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^\ell (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1) = \alpha \chi_{s_d}(0, 0) r(\ell, \ell_0) + \mathbf{v}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^\ell (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1) \quad (3.73)$$

où  $r$  est la fonction définie par :

$$r(\ell, \ell_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1)^H \left( \mathbf{J}^{\ell_0} \right)^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^\ell (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1) \quad (3.74)$$

Disposant d'une expression du signal reçu après traitement, nous développons l'expression du signal  $r$  lorsque le fouillis en haute résolution est modélisé par un processus AR(1).

#### 3.3.3.2 Analyse du signal reçu pour un fouillis modélisé par un processus AR(1)

Après avoir rappelé la modélisation AR(1) et les propriétés de corrélation associées, nous montrons le lien entre les échantillons haute résolution et basse résolution pour l'analyse du signal reçu après le traitement basse résolution.

##### a) Signal reçu après traitement haute résolution

Pour un processus AR(1), on a :

$$\tilde{v}(\tilde{\ell}) = a_1 \tilde{v}(\tilde{\ell} - 1) + u(\tilde{\ell}) \quad (3.75)$$

avec  $u$  un bruit blanc gaussien circulaire. La fonction d'autocorrélation  $r_{\tilde{v}\tilde{v}}$  de  $\tilde{v}$  vérifie :

$$r_{\tilde{v}\tilde{v}}(k) = \frac{\sigma_u^2}{1 - a_1^2} a_1^{|k|}, \quad \forall k \quad (3.76)$$

En réutilisant la définition de l'inverse de la matrice de covariance (3.30) pour  $p = 1$ , on aboutit à :

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 1 + a_1^2 & -a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -a_1 & 1 + a_1^2 & -a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

En faisant l'hypothèse que la puissance du bruit thermique est négligeable devant celle du fouillis, il vient :

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \approx \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} \quad (3.78)$$

Dans ce cas, on se replace dans la même situation que le contexte mono-résolution du paragraphe 3.3.2.2. Ainsi, d'après (3.59), le signal reçu  $\tilde{r}$  après traitement haute résolution vérifie :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = \frac{1}{\sigma_u^2} [\tilde{r}_1(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0) - \tilde{r}_2(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0)] \quad (3.59)$$

D'après (3.46),  $\tilde{r}_1$  satisfait

$$\tilde{r}_1(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) = \sum_{n=-p}^p \alpha_n r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + n) \quad (3.46)$$

avec, pour  $p = 1$  :

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 + a_1^2 & n = 0 \\ -a_1 & |n| = 1 \end{cases} \quad (3.79)$$

En insérant (3.79) dans (3.46), on aboutit à :

$$\tilde{r}_1(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) = (1 + a_1^2) r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) - a_1 \left( r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + 1) + r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} - 1) \right) \quad (3.80)$$

Concernant la fonction  $\tilde{r}_2$ , en prenant  $\tilde{\ell} \in \{[1; N\tilde{L} - 1 - N - 1] \cup [mN\tilde{L}; mN\tilde{L} - 1 - N - 1], m \in [1; M - 1]\}$ , on a :

$$\tilde{r}_2(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}) = 0 \quad (3.81)$$

Disposant d'une expression du signal reçu dans le cas haute résolution, analysons le cas du signal reçu après le traitement basse résolution.

### b) Signal reçu après traitement basse résolution

Considérons premièrement le lien entre les échantillons de la perturbation dans la chaîne de traitement basse et haute résolution, c'est-à-dire  $v(\tau, f_0)$  et  $\tilde{v}(\tau, f_0)$ . D'après (3.12),  $\tilde{v}(\tau, f_0)$  est défini par :

$$\tilde{v}(\tau) = \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{b} \quad (3.82)$$

et d'après (3.66),  $v(lT_s)$  satisfait :

$$v(\tau) = \mathbf{s}_{\mathbf{d}}^H(\tau) \mathbf{D}_{f_0}^H \mathbf{b} \quad (3.83)$$

Sachant qu'en basse résolution,  $\tau = \ell T$  et en notant que :

$$\mathbf{s}_{\mathbf{d}}(\ell T) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \mathbf{s}_{\Pi_{T_c}}(\ell T + nT_c) \quad (3.84)$$

il vient, en combinant (3.83) et (3.84) :

$$v(\ell T) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \tilde{v}(\ell T + nT_c) \quad (3.85)$$

Dans ce cas, en notant que  $T = NT_c$ , la fonction d'autocorrélation  $r_{vv}$  de  $v$  peut s'écrire en fonction de  $r_{\tilde{v}\tilde{v}}$  :

$$r_{vv}(m) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} d_{n_1} d_{n_2}^* r_{\tilde{v}\tilde{v}}(mN + n_1 - n_2) \quad (3.86)$$

En intégrant (3.76) dans (3.86), il vient :

$$r_{vv}(m) = \frac{\sigma_u^2}{1 - a_1^2} \begin{cases} \mathbf{d}^H \mathbf{B}_1 \mathbf{d} a_1^{mN} & m > 0 \\ \mathbf{d}^H \mathbf{B}_2 \mathbf{d} & m = 0 \\ \mathbf{d}^H \mathbf{B}_1^T \mathbf{d} a_1^{|mN|} & m < 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

avec :

$$\mathbf{B}_1 = (a_1^{i-j})_{i,j=1,\dots,N}, \quad \mathbf{B}_2 = (a_1^{|i-j|})_{i,j=1,\dots,N} \quad (3.88)$$

Toutefois, étant donné que :

$$\mathbf{d}^H \mathbf{B}_1 \mathbf{d} \neq \mathbf{d}^H \mathbf{B}_1^T \mathbf{d} \quad (3.89)$$

la forme (3.87) ne correspond pas à une structure de Toeplitz dont l'inverse possède une expression analytique connue [DOW03]. Ne disposant pas d'une expression analytique de  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ , nous ne pouvons montrer que  $r(\ell_0, \ell) = r(\ell_0 - \ell)$  car le code de phase qui optimiserait  $r(\ell_0, \ell)$  en termes de lobe principal et de lobes secondaires serait dépendant de la position  $\ell_0$  inconnue de la cible.

### c) Commentaires

Dans le cas de la voie de traitement haute résolution, en insérant (3.48) dans (3.80) et en se focalisant sur la première récurrence, c'est-à-dire  $\tilde{\ell} \in [1; N\tilde{L} - N - 1]$ , le signal reçu peut s'écrire en fonction des fonctions d'autocorrélation des codes  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}) &= \tilde{r}_1(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) \\ &= (1 + a_1^2) r_{\mathbf{c}}(0) r_{\mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell}) - a_1 r_{\mathbf{c}}(0) \left( r_{\mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} + 1) + r_{\mathbf{d}}(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell} - 1) \right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Sachant que  $r_{\mathbf{c}}(0) = N$ , l'optimisation de  $\tilde{r}_1$  ne dépend que du code  $\mathbf{d}$  et on peut alors considérer les trois critères relatifs à  $\tilde{r}_1(\tilde{\ell}_0 - \tilde{\ell})$  introduits précédemment, à savoir :

- la maximisation de la hauteur du lobe principal,
- la minimisation de la largeur du lobe principal,
- la minimisation du lobe secondaire le plus élevé.

Le code  $\mathbf{c}$  peut alors être utilisé pour augmenter la distance ambiguë du signal reçu de la voie de traitement haute résolution. Quant au code  $\mathbf{d}$ , il est choisi de telle sorte à optimiser les trois critères relatifs à la voie de traitement haute résolution uniquement.

Dans la prochaine section, nous présentons des résultats de simulations pour le choix des codes inter et intra-impulsion qui optimisent les trois critères.



### 3.3.4 Résultats de simulation

Pour les simulations, on considère les valeurs suivantes pour la taille  $M$  du code inter-impulsion, la taille  $N$  du code intra-impulsions et le nombre d'échantillons  $\tilde{L}$  :

$$M = 7$$

$$N = 13$$

$$\tilde{L} = 10$$

Les critères d'optimisation concernent le signal reçu  $\tilde{r}$  non bruité après traitement défini par :

$$\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d})^H \left( \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}_0} \right)^H \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{\tilde{\ell}} (\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}) \quad (3.27)$$

Pour que  $\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0) = \tilde{r}_1(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)$ , il suffit de prendre  $\tilde{\ell}_0$  supérieure à l'ordre du processus AR considéré. Dans notre cas, comme l'ordre  $p$  du processus AR est choisi inférieur à 10, on prend  $\tilde{\ell}_0 = 15$ . On calcule  $\tilde{r}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_0)$  pour  $\tilde{\ell} = 0, \dots, MN\tilde{L} - 1$  et les trois critères considérés sont :

– critère 1 :

$$\max_{\mathbf{d}} \tilde{r}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_0) = \max_{\mathbf{d}} \tilde{r}_1(0) \quad (3.91)$$

– critère 2 :

$$\min_{\mathbf{d}} \Delta_{\tilde{r}_1} \quad (3.92)$$

où  $\Delta_{\tilde{r}_1}$  est la largeur du lobe principal à  $-3dB$  de la fonction  $\tilde{r}_1$ .

– critère 3 :

$$\min_{\mathbf{d}} \max_{\tilde{\ell} > \tilde{\ell}} \tilde{r}_1(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0) \quad (3.93)$$

où  $\tilde{\ell}$  désigne la position du premier zéro de  $\tilde{r}_1(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)$ .

En ce qui concerne le code inter-impulsion  $\mathbf{c}$  pour les simulations, on prend le code de Barker de taille 7  $\mathbf{c}^{(8)} = [1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1]$ .

Pour simuler la méthode de sélection du code  $\mathbf{d}$ , deux approches peuvent être envisagées :

1. dans le premier scénario, le fouillis peut avoir n'importe quel spectre. Dans ce cas,  $\mathcal{D}$  correspond au domaine de stabilité. Pour  $p = 1$ , il suffit de choisir le coefficient du modèle AR dans le disque unité dans le plan complexe. Lorsque le coefficient  $a_1$  est réel, il doit vérifier  $|a_1| < 1$ . Pour  $p = 2$ , si les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  sont réels, ils doivent se situer dans le triangle de stabilité [NAJ06]. De manière générale, le spectre Doppler du fouillis est basse fréquence. Pour cette raison, nous avons restreint les valeurs de  $a_1$  à l'ensemble  $\mathcal{D} = \{0.5, 0.505, 0.51, \dots, 0.995\}$ . Concernant la modélisation AR(2), l'ensemble  $\mathcal{D}$  est représenté sur la figure 3.13 où nous avons également représenté le reste du triangle de stabilité en gris clair.

Pour des ordres supérieurs, il faut s'assurer que les pôles associés au modèle AR soient dans le disque unité dans le plan complexe  $z$ . D'autres critères existent et sont rappelés dans [NAJ06] ;

2. dans le second scénario, on dispose de données de fouillis. Dans ce cas, on peut estimer l'ordre  $\hat{p}$  du modèle, les paramètres  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{\hat{p}}$  ou les pôles  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{\hat{p}}$  ainsi que la variance du processus générateur.  $\mathcal{D}$  est défini en faisant varier légèrement les pôles  $\hat{p}_1 + \Delta_1, \dots, \hat{p}_{\hat{p}} + \Delta_{\hat{p}}$  en conservant la stabilité, c'est-à-dire avec  $|\hat{p}_i + \Delta_i| < 1, i = 1, \dots, \hat{p}$ .

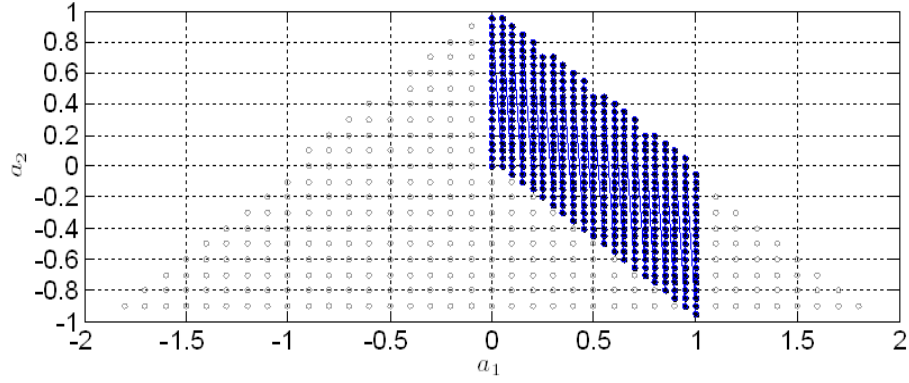


FIGURE 3.13 – Valeurs des paramètres AR considérés dans le triangle de stabilité discrétisé

Disposant de l'ensemble  $\mathcal{D}$  de jeux de paramètres AR, les trois fronts de Pareto sont calculés pour chacun des jeux de paramètres. Pour chaque code  $\mathbf{d}^i, i = 1, \dots, 2^M$ , nous déduisons les trois pourcentages d'appartenance  $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}$  et  $p_3^{(i)}$  et choisissons les poids suivants :

$$0.5p_1^{(i)} + 0.3p_2^{(i)} + 0.2p_3^{(i)}, i = 0, \dots, 2^{M-1} - 1 \quad (3.94)$$

Les « meilleurs » codes sont ceux qui maximisent la somme pondérée.

#### a) Premier scénario

En appliquant la méthode décrite précédemment pour un processus AR(1) et pour la variance du bruit thermique  $\sigma^2 = 1$ , les codes de phases les plus robustes à des variations de fouillis sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(2731)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1]^T \\ \mathbf{d}^{(2734)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1]^T \\ \mathbf{d}^{(3414)} &= [-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1]^T \\ \mathbf{d}^{(2730)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1]^T \end{aligned}$$

ainsi que  $-\mathbf{d}^{(2731)}, -\mathbf{d}^{(2734)}, -\mathbf{d}^{(3414)}$  et  $-\mathbf{d}^{(2730)}$ .

Afin d'illustrer les différences entre ces codes en termes de lobe principal et lobes secondaires du signal reçu après traitement, comparons  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  pour ces codes avec  $a_1 = 0.995$  et pour  $-N - 2 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq N + 2$ .

Sur la figure 3.14, les courbes pour  $\mathbf{d}^{(2734)}$  et  $\mathbf{d}^{(2390)}$  se confondent. Ainsi, le code  $\mathbf{d}^{(2731)}$  maximise la hauteur du lobe principal du signal reçu au détriment de sa largeur alors que le signal  $\tilde{r}$  associé au code  $\mathbf{d}^{(2734)}$  possède un lobe principal moins élevé mais une largeur du lobe principal plus fine. En pratique, l'utilisateur choisit le code intra-impulsion parmi les codes retenus.

On vérifie également la propriété que le code de phase  $\mathbf{c}$  permet d'augmenter la distance ambiguë en traçant  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  associé au code  $\mathbf{d}^{(2726)}$  pour  $-MN\tilde{L} + 1 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq MN\tilde{L} - 1$ .

Sur la figure 3.15, les positions des périodes de récurrences sont représentées par des lignes verticales en pointillées. On retrouve la propriété que les lobes secondaires tous les  $T_r$  sont pondérés par les coefficients de la fonction d'autocorrélation du code inter-impulsion puisque, dans le cas du code de Barker 7 :

$$|r_{\mathbf{c}}(1)| = |r_{\mathbf{c}}(3)| = |r_{\mathbf{c}}(5)| = 0 \quad (3.95)$$

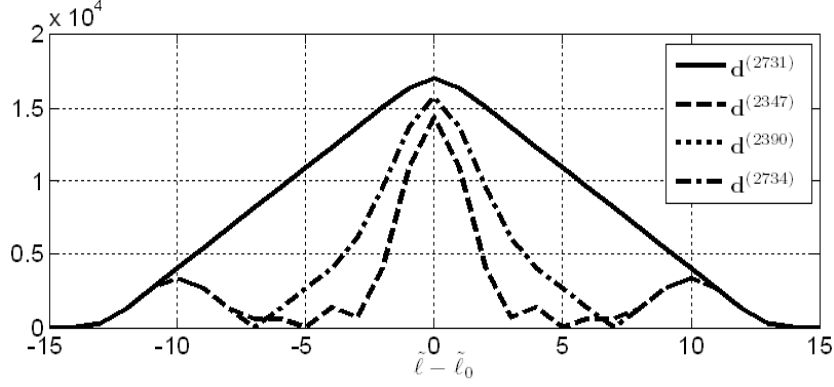


FIGURE 3.14 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1),  $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-4}$

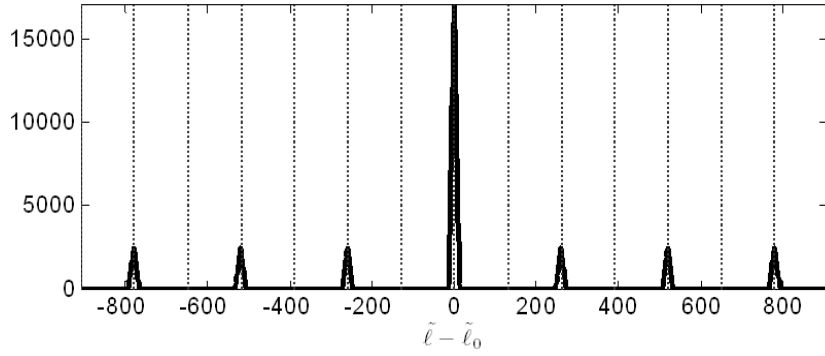


FIGURE 3.15 –  $\tilde{r}$  après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1),  $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-4}$

et :

$$|r_c(2)| = |r_c(4)| = |r_c(6)| = 1 \quad (3.96)$$

A présent, on teste l'influence de la variance  $\sigma^2$  du bruit thermique. Pour cela, on effectue les mêmes simulations avec  $\sigma^2 = 10^{-2}$  et  $\sigma^2 = 10^{-1}$ . On trace alors sur les figures 3.16 et 3.17  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  pour les meilleurs codes pour  $a_1 = 0.995$ .

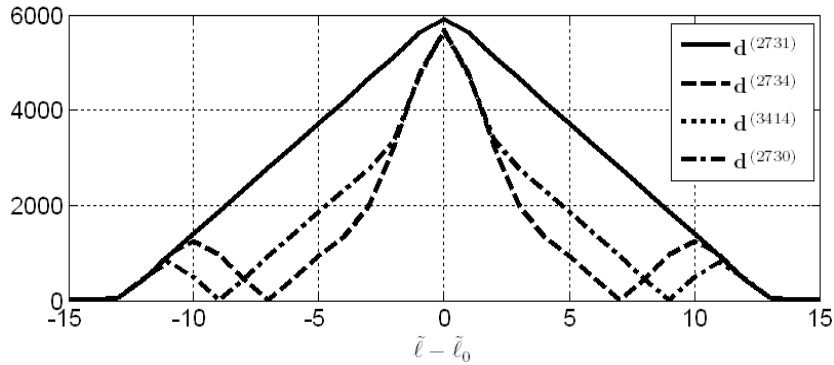


FIGURE 3.16 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1),  $a_1 = 0.0995, \sigma^2 = 10^{-2}$

Lorsque  $\sigma^2$  varie, seul le code  $\mathbf{d}^{(2731)}$  demeure parmi les meilleurs codes. Toutefois, le code  $\mathbf{d}^{(2734)}$  qui est le quatrième meilleur code pour  $\sigma^2 = 10^{-4}$  reste dans les 20 premiers meilleurs codes (17<sup>ième</sup> rang) pour  $\sigma^2 = 10^{-1}$  et le code  $\mathbf{d}^{(2390)}$  qui était au rang 3 pour  $\sigma^2 = 10^{-4}$  se

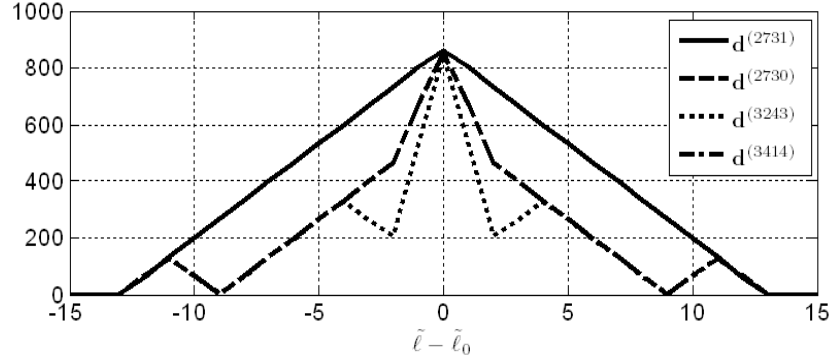


FIGURE 3.17 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(1),  $a_1 = 0.0995$ ,  $\sigma^2 = 10^{-1}$

maintient dans les 15 premiers (13<sup>ième</sup> rang) pour  $\sigma^2 = 10^{-1}$ . Les codes les plus robustes au fouillis restent globalement adaptés malgré une variation de  $\sigma^2$ .

Enfin, nous avons également effectué les mêmes simulations pour d'autres pondérations que (3.94) et nous avons obtenu des résultats similaires. En effet, nous avons considéré les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} &0.6p_1^{(i)} + 0.3p_2^{(i)} + 0.1p_3^{(i)} \\ &0.7p_1^{(i)} + 0.2p_2^{(i)} + 0.1p_3^{(i)} \\ &0.4p_1^{(i)} + 0.35p_2^{(i)} + 0.25p_3^{(i)} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Les 8 meilleurs codes sont identiques.

On considère à présent le cas d'une modélisation AR(2). Les quatre codes de phases les plus robustes au fouillis sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(2731)} &= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T \\ \mathbf{d}^{(2726)} &= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^T \\ \mathbf{d}^{(2902)} &= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^T \\ \mathbf{d}^{(2779)} &= [-1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^T \end{aligned}$$

et les opposés  $-\mathbf{d}^{(2731)}$ ,  $-\mathbf{d}^{(2726)}$ ,  $-\mathbf{d}^{(2902)}$  et  $-\mathbf{d}^{(2779)}$ .

Comme précédemment, on trace  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  associé aux codes  $\mathbf{d}^{(2731)}$ ,  $\mathbf{d}^{(2726)}$ ,  $\mathbf{d}^{(2902)}$  et  $\mathbf{d}^{(2779)}$  avec  $a_1 = 1.8$  et  $a_2 = -0.9$  et pour  $-N - 2 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq N + 2$ , Cf. Fig. 3.18.

Sur la figure 3.18, le signal reçu après traitement  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  pour les codes  $\mathbf{d}^{(2726)}$  et  $\mathbf{d}^{(2902)}$  est identique. A nouveau, chacun des meilleurs codes est un compromis entre les trois critères et le choix final dépend de l'utilisateur.

On vérifie également le propriété que le code de phase  $\mathbf{c}$  permet d'augmenter la distance ambiguë en traçant le signal  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  associé au code  $\mathbf{d}^{(2726)}$  pour  $-MN\tilde{L} + 1 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq MN\tilde{L} - 1$ , Cf. Fig. 3.19.

Enfin, on teste l'influence de la variance du bruit thermique en effectuant les mêmes simulations avec  $\sigma^2 = 10^{-2}$  et  $\sigma^2 = 10^{-1}$ . Les codes les plus robustes au fouillis sont identiques au

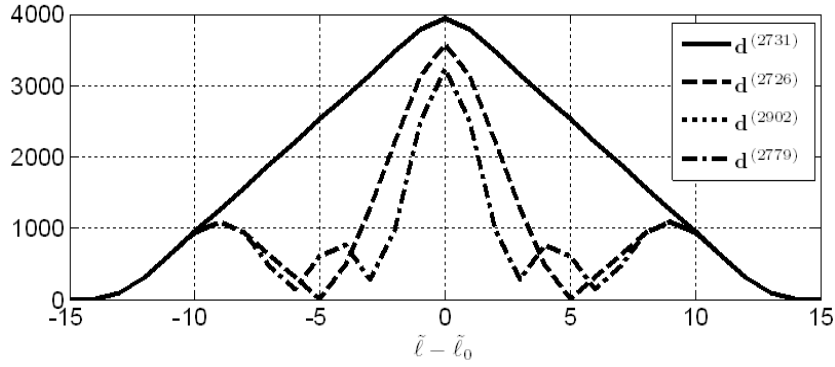


FIGURE 3.18 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2),  $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-4}$

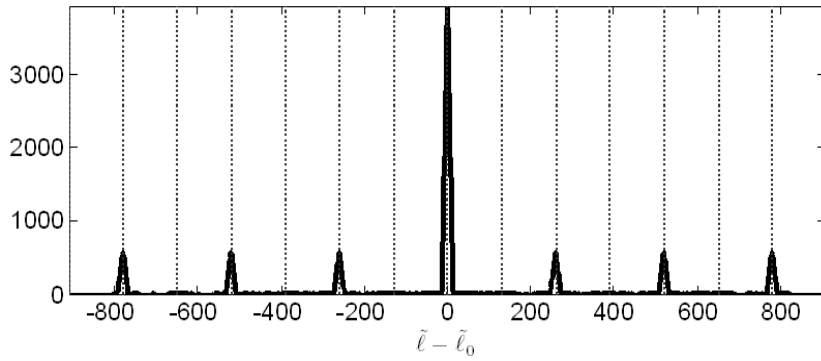


FIGURE 3.19 –  $\tilde{r}$  après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2),  $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-4}$

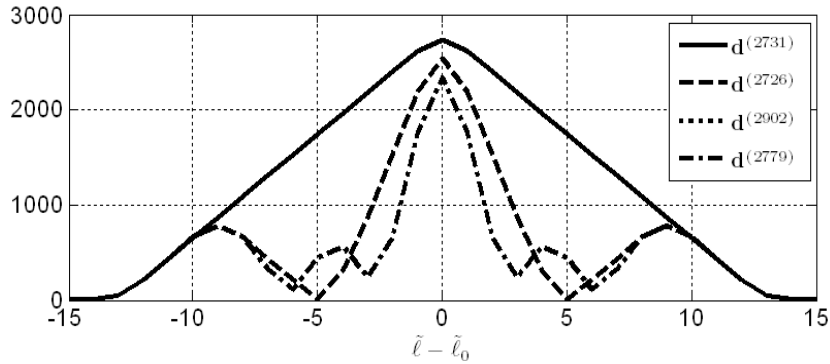


FIGURE 3.20 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2),  $a_1 = 1.8, a_2 = -0.9, \sigma^2 = 10^{-2}$

cas précédent  $\sigma^2 = 10^{-4}$ . On trace les signaux reçus  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  pour ces codes pour  $a_1 = 1.8$  et  $a_2 = -0.9$ .

Dans le cas d'un fouillis modélisé par un processus AR(2), la méthode de sélection du code de phase intra-impulsion est peu sensible à une variation de  $\sigma^2$ .

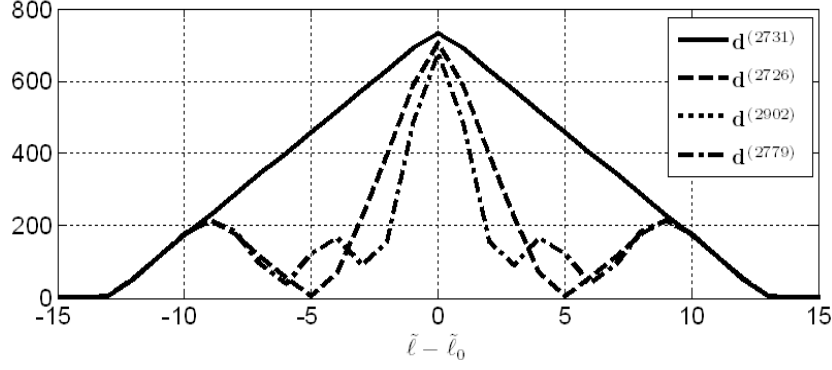


FIGURE 3.21 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les 4 codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(2),  $a_1 = 1.8$ ,  $a_2 = -0.9$ ,  $\sigma^2 = 10^{-1}$

### b) Second scénario

Dans ce second scénario, nous disposons de données réelles de fouillis de mer. Les paramètres AR sont estimés à partir des équations de Yule-Walker pour un ordre  $p$  fixé *a priori*. Dans un premier temps, nous prenons  $p = 5$ . Pour générer un ensemble de paramètres AR proches des 5 paramètres AR estimés, nous leur appliquons un bruit blanc gaussien de faible variance en s'assurant de la stabilité du processus associé. Nous choisissons de considérer un ensemble de 100 jeux de paramètres AR dont les valeurs sont représentées dans le plan complexe sur la figure 3.22.

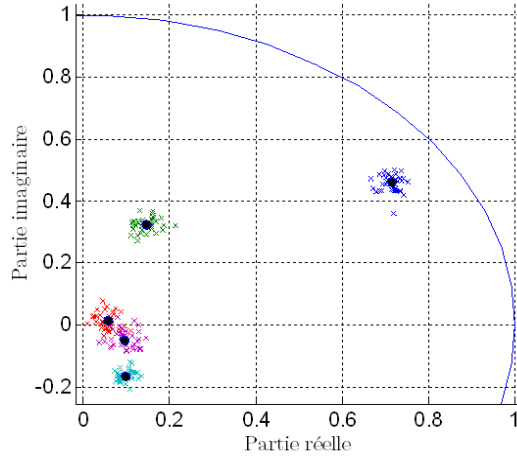


FIGURE 3.22 – Ensemble des 100 jeux de paramètres AR considérés dans le plan complexe

Disposant de la matrice de covariance, nous avons appliqué le même traitement que précédemment et nous avons calculé les trois fronts de Pareto pour chaque jeu de paramètres AR. Dans ce cas, les quatre meilleurs codes sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(2731)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1]^T \\ \mathbf{d}^{(2732)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1]^T \\ \mathbf{d}^{(2730)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1]^T \\ \mathbf{d}^{(2637)} &= [-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1]^T \end{aligned}$$

ainsi que leurs opposés.

On trace le signal  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  associé à ces codes pour  $-N - 2 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq N + 2$  et pour  $-MN\tilde{L} + 1 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq MN\tilde{L} - 1$ , Cf. Fig. 3.23-3.24.

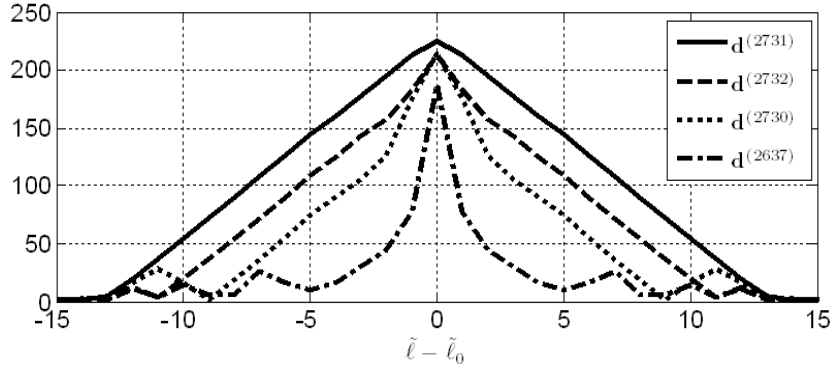


FIGURE 3.23 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(5)

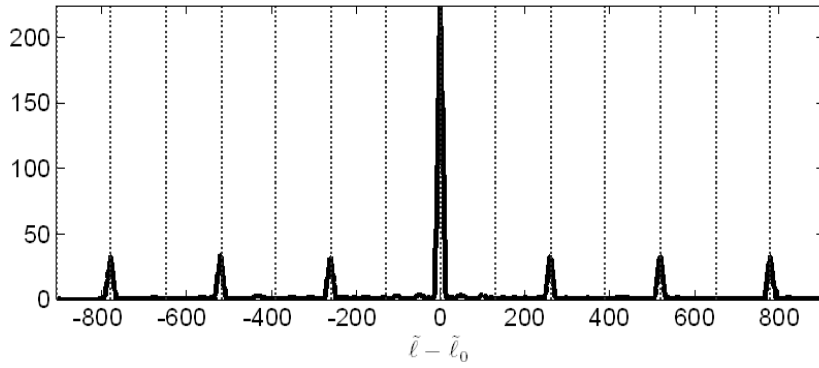


FIGURE 3.24 –  $\tilde{r}$  après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(5)

A nouveau, on confirme que le code inter-impulsion permet d'augmenter la distance ambiguë d'une part, et d'autre part, les meilleurs codes intra-impulsion réalisent un compromis entre les différents critères et c'est l'utilisateur qui choisit le code intra-impulsion parmi ces codes en fonction de ses besoins.

On effectue les mêmes simulations avec  $p = 7$ . Dans ce cas, les meilleurs codes sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(2637)} &= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]^T \\ \mathbf{d}^{(3499)} &= [-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T \\ \mathbf{d}^{(2732)} &= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^T \\ \mathbf{d}^{(1611)} &= [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T \end{aligned}$$

ainsi que leurs opposés.

On trace également le signal  $|\tilde{r}(\tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0)|$  associé à ces codes pour  $-N - 2 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq N + 2$  et pour  $-MN\tilde{L} + 1 \leq \tilde{\ell} - \tilde{\ell}_0 \leq MN\tilde{L} - 1$ , Cf. Fig. 3.25-3.26.

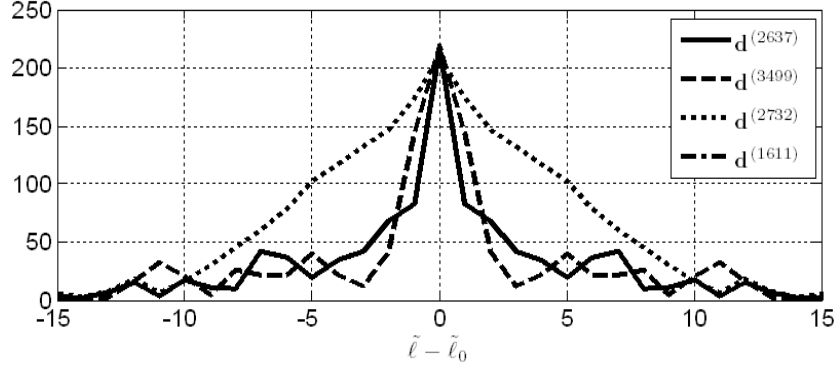


FIGURE 3.25 –  $\tilde{r}$  après traitement pour les codes intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(7)

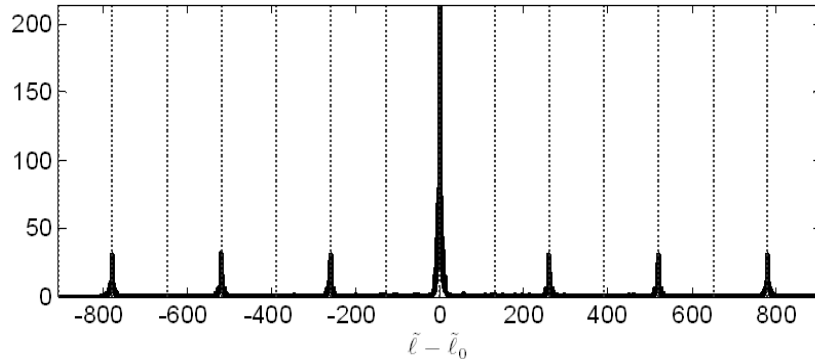


FIGURE 3.26 –  $\tilde{r}$  après traitement pour le code intra-impulsion les plus robustes à des variations du fouillis représenté par un modèle AR(7)

### c) Choix du code intra-impulsion

En pratique, pour la sélection du code intra-impulsion, l'utilisateur peut soit appliquer le scénario 1 et faire les simulations au sol afin d'en déduire la forme d'onde la plus robuste à des variations de fouillis. Dans ce cas, la forme d'onde est implantée dans le radar et ne change pas.

L'utilisateur peut également choisir le scénario 2 et estimer les paramètres AR du fouillis à partir de données secondaires pour en déduire la forme d'onde robuste à des variations de fouillis. La forme d'onde varie donc en fonction du fouillis. L'intérêt de ce scénario est qu'en estimant la forme d'onde la plus robuste à des variations de fouillis, il n'est pas nécessaire de la changer en permanence.

### 3.3.5 Bilan sur les deux approches proposées

Nous avons proposé une forme d'onde hybride composée d'un code de phase inter-impulsion et d'un code de phase intra-impulsion, et nous avons également explicité les traitements haute et basse résolution associés. Ces traitements reposent sur le filtre adapté dans un contexte de fouillis coloré gaussien. Les codes de phase sont choisis de telle sorte à optimiser différents critères sur le signal reçu après traitement. Pour expliciter ces critères, nous avons modélisé le fouillis en haute résolution par un processus AR( $p$ ). Ce choix de modèle s'explique par le fait qu'il permet



de modéliser différents types de fouillis et l'inverse de la matrice de covariance d'un processus AR peut être obtenue explicitement. En s'appuyant sur cette seconde caractéristique, nous avons obtenu une expression analytique du signal reçu après traitement et après calcul, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- nous avons montré que lorsque la cible ne se situe pas sur les  $p$  premières cases distance de la récurrence ni sur les  $N + p$  dernières cases distance de chaque récurrence, alors il est possible d'optimiser le signal reçu après traitement. En pratique,  $p < 10$  et on peut adapter la période de récurrence afin que les  $N + p$  dernières cases distance soient hors du domaine de recherche du radar ;
- lorsque l'optimisation est possible, le code inter-impulsion peut être sélectionné pour augmenter la distance ambiguë et le code intra-impulsion peut être choisi pour optimiser différents critères relatifs au signal reçu après traitement tels que la maximisation de la probabilité de détection ou encore la minimisation des lobes secondaires pour réduire les fausses alarmes. Pour l'optimisation conjointe de ces différents critères, nous avons parcouru l'ensemble des codes de phase intra-impulsion candidats de manière exhaustive afin de déterminer les fronts de Pareto. Nous avons ensuite étudié la robustesse des solutions du front de Pareto à des variations de fouillis. Pour cela, nous avons calculé les fronts de Pareto pour différentes valeurs des paramètres AR. A l'aide d'un opérateur de logique floue, nous avons proposé une méthode permettant de sélectionner automatiquement les codes de phase les plus robustes à des variations de fouillis ;
- la modélisation  $AR(p)$  du fouillis en haute résolution ne permet pas d'optimiser les critères basse résolution. Dans ce cas, les codes de phase sont choisis de telle sorte à optimiser les critères en haute résolution uniquement.

En pratique, on pourrait effectuer toutes les simulations hors-ligne, ce qui éviterait d'embarquer les calculs. La forme d'onde serait alors définie au préalable puis implantée sur le radar. Par rapport à la chaîne de traitement, cette forme d'onde pourrait être utilisée pour acquérir des données secondaires afin d'estimer la matrice de covariance et d'appliquer les traitements proposés. Étant donné que la forme d'onde choisie est celle qui optimise les différents critères pour une majorité de fouillis différents, l'estimation des paramètres AR ne serait pas nécessaire. Enfin, pour répondre au problème de distance aveugle, nous suggérons de faire varier la période de récurrence à chaque train d'impulsions.

# Conclusions et perspectives

---

Ces travaux de thèse ont porté sur deux problématiques complémentaires relatives au traitement radar haute résolution : la détection d'une cible dans un cadre haute résolution et la conception d'une forme d'onde compatible avec deux chaînes de traitement basse et haute résolution.

Concernant le premier point, il s'agissait de proposer un traitement qui détecte et localise les  $K$  réflecteurs provenant de la cible parmi les  $Q$  cases distance. Pour cela, en supposant que  $K$  et  $Q$  sont définis *a priori* et que le signal reçu est perturbé par du bruit blanc gaussien circulaire de variance supposée connue, nous avons explicité le GLRT de ce modèle de cible étendue en tenant compte de la localisation inconnue des réflecteurs. Sous l'hypothèse usuelle que les signaux reçus sont décorrélés, le détecteur obtenu consiste à comparer la somme des  $K$  cases les plus énergétiques à un seuil.

Notre contribution a alors porté sur la caractérisation de ce détecteur en termes de PFA et de PDL. Utilisant des raisonnements issus des statistiques d'ordre, nous avons donné des expressions analytiques approchées de ces deux probabilités [ROU15b]. Il est à noter qu'elles sont liées à la fonction de répartition d'une somme de deux variables aléatoires dont l'une est distribuée selon une loi hypo-exponentielle et l'autre selon une loi gamma. Nous avons effectué une étude comparative en termes de PD entre le détecteur obtenu et le détecteur quadratique [VAN71], le détecteur  $K$  parmi  $Q$  [SHN98] et le détecteur SSD [GER97]. A partir de simulations de Monte Carlo, nous avons montré que le détecteur étudié présente des performances de détection supérieures à celles des autres.

Les perspectives de travail sont multiples :

1. Dans un premier temps, il serait intéressant d'obtenir une expression analytique de la PD. En effet, nous avons montré qu'elle peut s'exprimer comme la somme de  $\binom{Q}{K}$  probabilités. Pour  $K$  et  $Q$  suffisamment faibles, ces probabilités sont liées à la somme de deux variables aléatoires dont l'une est distribuée selon une loi hypo-exponentielle et l'autre selon une loi gamma. Toutefois, lorsque  $K$  et  $Q$  augmentent, certaines de ces probabilités sont liées

à la somme d'au moins trois variables aléatoires dont une est distribuée selon une loi hypo-exponentielle et les autres selon des lois gamma dont les paramètres ne sont pas nécessairement identiques.

2. Dans les simulations effectuées, nous avons fixé *a priori* le nombre  $K$  de réflecteurs et avons analysé le scénario où  $K$  ne correspond pas au vrai nombre de réflecteurs de la cible. Une alternative consisterait à intégrer une étape d'estimation de  $K$ . Dans ce cas, il faudrait tenir compte de cet *a priori* dans les calculs des PFA, PDL et PD.
3. Enfin, nous avons considéré le cas où le signal reçu est perturbé par du bruit thermique uniquement. Nous pourrions envisager le développement de cette approche dans le cas où le signal reçu contient également du fouillis corrélé temporellement.

Dans la seconde partie, nous nous sommes focalisés sur la conception d'une forme d'onde compatible avec deux voies de traitement. Après avoir dressé un bref état de l'art sur l'optimisation de formes d'onde, nous avons opté pour l'optimisation d'une forme d'onde composée de deux codes de phase dont l'un est intra-impulsion et l'autre inter-impulsion. Pour cela, nous avons explicité le signal reçu en sortie des voies de traitement haute et basse résolution dans le cas où le fouillis est gaussien corrélé. Modélisant le fouillis en haute résolution par un processus AR, nous avons montré [ROU15a] que le code inter-impulsion permet d'augmenter la distance ambiguë alors que le code intra-impulsion a une influence sur le lobe principal et les lobes secondaires du signal reçu après traitement.

Quand on opte pour la famille des codes de phase binaires, la distance ambiguë peut être augmentée en choisissant le code inter-impulsion de telle manière que les lobes secondaires de sa fonction d'autocorrélation sont les plus petits. Pour des longueurs de code  $L$  inférieures à 13, on peut choisir les codes de Barker. Sinon, on peut s'orienter vers les codes MPSL qui minimisent les lobes secondaires de la fonction d'autocorrélation.

Concernant le code intra-impulsion, il est choisi de telle sorte à optimiser plusieurs critères relatifs au signal reçu après le traitement haute résolution : la maximisation de la hauteur du lobe principal pour maximiser la PD, la minimisation de la largeur du lobe principal pour avoir la résolution en distance la plus fine et la minimisation des lobes secondaires pour minimiser les fausses détections. Nous avons montré que ces critères dépendent uniquement de la fonction d'autocorrélation du code intra-impulsion et des coefficients AR du fouillis. Pour un jeu de paramètre AR donné, nous avons regroupé ces trois problèmes d'optimisation en un problème d'optimisation multi-objectifs et nous avons calculé le front de Pareto contenant l'ensemble des solutions « optimales ». Afin d'évaluer la robustesse des codes de phase optimaux à des variations du fouillis, nous avons recherché le front de Pareto pour plusieurs jeux de paramètres AR et avons retenu les codes de phase qui appartiennent le plus souvent aux fronts de Pareto de premier, deuxième et troisième ordre. Enfin, nous avons appliqué cette approche au cas bi-résolution [ROU14].

Pour cette seconde partie, plusieurs perspectives peuvent être envisagées. Nous avons considéré que la fréquence Doppler est connue *a priori*. Nous pourrions étudier la sensibilité de l'approche à un décalage en fréquence Doppler du signal reçu. Concernant le scénario d'étude, le cas d'un fouillis non-gaussien pourrait être analysé en optant pour une modélisation SIRV [PAS05] pour laquelle le speckle peut être considéré comme un processus AR [PET10]. Nous pourrions éga-

lement utiliser un modèle de cible étendue pour la voie de traitement haute résolution. Enfin, les formes d'onde modulées en fréquence et en particulier les formes d'onde avec sauts de fréquence pourraient être une alternative aux trains d'impulsions modulées en phase. En effet, ce type de signaux possède un caractère bi-résolution puisque la bande passante de chaque impulsion est compatible avec la basse résolution alors que la bande passante totale du train d'impulsions est compatible avec la haute résolution.

A ce stade, nous avons étudié parallèlement la détection d'une cible dans un cadre haute résolution et la conception d'une forme d'onde compatible avec un système bi-résolution. La prochaine étape consisterait à intégrer le détecteur introduit en première partie dans la voie de traitement haute résolution du système bi-résolution pour proposer un système complet.



# Annexes



## Annexe A

# Rappels sur les densités de probabilité

### Loi gaussienne/normale

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi Gaussienne complexe de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , notée  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(m, \sigma^2)$  si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\mathcal{N}_{\mathbb{C}}}(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \exp\left(-\frac{|x-m|^2}{\sigma^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad (\text{A.1})$$

Un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de taille  $L \times 1$  suit une loi gaussienne complexe multivariée de moyenne  $\mathbf{m}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{\Gamma}$  si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^L}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^L \det(\mathbf{\Gamma})} \exp\left(-(\mathbf{x} - \mathbf{m})^H \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})\right), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^L \quad (\text{A.2})$$

### Loi de Rayleigh

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Rayleigh de paramètre d'échelle  $\sigma > 0$ , notée  $\mathcal{R}(\sigma)$  si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\mathcal{R}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Si  $Y \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ , alors  $|Y| \sim \mathcal{R}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$

### Loi exponentielle

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\text{Exp}(\lambda)$  si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\text{Exp}}(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On note que  $\lambda = 1/\mathbb{E}(X)$ .



## Loi hypo-exponentielle

Soient  $Q$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_Q$  indépendantes telles que :

$$X_1 \sim \text{Exp}(\phi_1), \dots, X_Q \sim \text{Exp}(\phi_Q)$$

avec  $\phi_1, \dots, \phi_Q$  tous distincts.

La loi de la variable  $X_1 + \dots + X_Q$  est appelée loi « Hypo-exponentielle » et sa densité de probabilité  $p_{\text{hypoExp}}$  est définie par :

$$p_{\text{hypoExp}}(x) = \begin{cases} \sum_{q=1}^Q \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^Q \frac{\phi_j}{\phi_j - \phi_q} \phi_q \exp(-\phi_q x), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

## Loi log-normale

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi log-normale de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\ln(\mathcal{N})}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right), & \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Si  $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors  $\exp(Y)$  suit une loi log-normale de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ .

## Loi du $\chi^2$ centrée

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi du  $\chi^2$  centrée à  $Q$  degrés de liberté si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\chi^2, Q}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{Q}{2}-1}}{2^{\frac{Q}{2}} \Gamma(\frac{Q}{2})} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} \exp(-x) dx \quad (\text{A.8})$$

La fonction  $\Gamma$  vérifie également  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Si  $Y \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ , alors  $\frac{|Y|^2}{\sigma^2/2} \sim \chi^2(2)$ . De plus, soient  $Q$  variables aléatoires indépendantes  $Y_1, \dots, Y_Q$  distribuées selon des lois complexes gaussiennes centrées de variances respectives  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_Q^2$ . Alors :

$$\sum_{q=1}^Q \frac{|Y_q|^2}{\sigma_q^2/2} \sim \chi^2(2Q) \quad (\text{A.9})$$

Remarque : en prenant  $Q = 2$ , on note que  $\chi^2(2) = \text{Exp}(\frac{1}{2})$ .

## Loi du $\chi^2$ non-centrée

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi du  $\chi^2$  non-centrée à  $Q$  degrés de liberté si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\chi^2,nc}(x; a) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x+a}{2}\right) \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{Q}{4}-\frac{1}{2}} I_{Q/2-1}(\sqrt{ax}) & x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

avec  $I_\nu$  la fonction de Bessel de première espèce définie sur  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \quad (\text{A.11})$$

avec  $\nu \in \mathbb{R}$ .

Si  $Y \sim \mathcal{N}_C(\mu, \sigma^2)$ , alors  $\frac{|Y|^2}{\sigma^2/2} \sim \chi_{nc}^2(2; a)$  avec  $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ . De plus, soient  $Q$  variables aléatoires indépendantes  $Y_1, \dots, Y_Q$  distribuées selon des lois complexes gaussiennes de moyenne  $\mu_1, \dots, \mu_Q$  et de variances respectives  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_Q^2$ . Alors  $\sum_{q=1}^Q \frac{|Y_q|^2}{\sigma_q^2/2} \sim \chi_{nc}^2(2Q; a)$  avec  $a = \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q^2}{\sigma_q^2}$ .

## Loi de Weibull

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Weibull de paramètres de forme  $a > 0$  et d'échelle  $b > 0$ , notée  $\mathcal{W}(a, b)$ , si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\mathcal{W}}(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Remarque : on note que  $\mathcal{W}(\sqrt{2}\sigma, 2) = \mathcal{R}(\sigma)$ ,  $\mathcal{W}(a, 1) = \text{Exp}\left(\frac{1}{a}\right)$ .

## Loi K

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi K de paramètres  $\nu > 0$  et  $\mu > 0$ , notée  $\mathcal{K}(\nu, \mu)$ , si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} \frac{4}{\Gamma(\nu)} \frac{x^\nu}{\mu^{\frac{\nu+1}{2}}} K_{\nu-1}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}x\right), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

avec  $K_{\nu-1}$  la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce définie par :

$$K_{\nu-1}(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-x \cosh(t)) \cosh((\nu-1)t) dt \quad (\text{A.14})$$

## Loi Gamma

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi Gamma de paramètres de forme  $k > 0$  et d'intensité  $\nu > 0$  si sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{\Gamma}(x; k, \nu) = \begin{cases} \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} \exp(-\nu x), & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

avec  $\Gamma(k)$  la fonction Gamma.

Remarque : La densité de probabilité  $p_\Gamma$  s'exprime également en fonction du paramètre d'échelle  $\theta$  tel que  $\theta = 1/\nu$ .

La fonction de répartition  $F_\Gamma$  de la loi Gamma s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} F_\Gamma(x; k, \nu) &= \int_0^x p_\Gamma(u; k, \nu) du \\ &= \frac{p_\gamma(\nu x; k)}{\Gamma(k)} \end{aligned} \tag{A.16}$$

où  $p_\gamma$  désigne la fonction Gamma incomplète inférieure de paramètre  $a \in \mathbb{R}$  définie par :

$$p_\gamma(y; a) = \int_0^y x^{a-1} \exp(-x) dx \tag{A.17}$$

## Annexe B

# Annexes relatives au chapitre 2

### B.1 Propriété asymptotique de la fonction d'autocorrélation d'une impulsion MLF

Soit le signal  $s$  une impulsion modulée linéairement en fréquence (MLF) de bande  $B$  et de durée  $T$  vérifiant :

$$T = NT_s \quad (\text{B.1})$$

avec  $T_s$  la période d'échantillonnage.

$s$  est défini par :

$$s(lT_s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j\pi \frac{B}{T}(lT_s)^2\right) \Pi_{NT_s}(lT_s) \quad (\text{B.2})$$

où  $\Pi_{NT_s}$  désigne la porte de largeur  $NT_s$  définie en (3.6).

Soit  $r_{ss}$  la fonction d'autocorrélation satisfaisant :

$$r_{ss}(\tau, \tau') = \sum_{l=0}^{L-1} s(lT_s - \tau') s^*(lT_s - \tau) \quad (\text{B.3})$$

où l'on suppose  $\tau, \tau' \in [0; (L - N - 1)T_s]$ .

Dans cette annexe, en échantillonnant  $\tau$  et  $\tau'$  à la période d'échantillonnage  $\delta = 1/B$ , c'est-à-dire en posant  $\tau = \ell\delta$  et  $\tau' = \ell'\delta$ , on veut montrer que la fonction d'autocorrélation  $r_{ss}$  du signal  $s$  vérifie asymptotiquement :

$$|r_{ss}(\ell\delta, \ell'\delta)| = |\text{sinc}(\pi(\ell - \ell')B\delta)| + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (\text{B.4})$$

Pour cela, développons premièrement l'expression (B.3) de  $r_{ss}$ . En remplaçant  $s$  par son expression (B.2) dans (B.3), il vient :

$$\begin{aligned} r_{ss}(\tau, \tau') &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{L-1} \exp\left(-j\pi \frac{B}{T}(lT_s - \tau')^2\right) \Pi_{NT_s}(lT_s - \tau') \exp\left(j\pi \frac{B}{T}(lT_s - \tau)^2\right) \Pi_{NT_s}(lT_s - \tau) \\ &= \frac{1}{N} \exp\left(j\pi \frac{B}{T}(\tau^2 - (\tau')^2)\right) \sum_{l=0}^{L-1} \Pi_{NT_s}(lT_s - \tau') \exp\left(-j2\pi \frac{B}{T}lT_s(\tau - \tau')\right) \Pi_{NT_s}(lT_s - \tau) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Pour  $|\tau - \tau'| > NT_s$ ,  $r_{ss}(\tau, \tau') = 0$ . Sinon, pour  $\tau > \tau'$ , (B.5) devient :

$$r_{ss}(\tau, \tau') = \frac{1}{N} \exp\left(j\pi \frac{B}{T}(\tau^2 - (\tau')^2)\right) \sum_{l=\lceil \frac{\tau}{T_s} \rceil}^{\lfloor \frac{\tau'}{T_s} \rfloor + N - 1} \exp\left(-j2\pi \frac{B}{T} l T_s (\tau - \tau')\right) \quad (\text{B.6})$$

En effectuant le changement de variable  $m = l - \lceil \frac{\tau}{T_s} \rceil$  dans (B.6) et en prenant le module de  $r_{ss}$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} |r_{ss}(\tau, \tau')| &= \frac{1}{N} \left| \sum_{m=0}^{N-1 + \lfloor \frac{\tau'}{T_s} \rfloor - \lceil \frac{\tau}{T_s} \rceil} \exp\left(-j2\pi \frac{B}{T} m T_s (\tau - \tau')\right) \right| \\ &= \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{B}{T} \left(N + \lfloor \frac{\tau'}{T_s} \rfloor - \lceil \frac{\tau}{T_s} \rceil\right) T_s (\tau - \tau')\right)}{\sin\left(\pi \frac{B}{T} T_s (\tau - \tau')\right)} \right| \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

En remplaçant  $T$  par (B.1) dans (B.7), on obtient :

$$|r_{ss}(\tau, \tau')| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(\pi B \left(1 - \frac{1}{N} \left(\lceil \frac{\tau}{T_s} \rceil - \lfloor \frac{\tau'}{T_s} \rfloor\right)\right) (\tau - \tau')\right)}{\sin\left(\pi \frac{B}{N} (\tau - \tau')\right)} \right| \quad (\text{B.8})$$

De plus, en choisissant une largeur  $\delta$  de case distance inversement proportionnelle à la bande passante, c'est-à-dire  $B\delta = 1$ , et en supposant que les retards  $\tau$  et  $\tau'$  sont des multiples entiers de  $\delta$ , c'est-à-dire :

$$\tau = \ell\delta = \frac{\ell}{B}, \quad \tau' = \ell'\delta = \frac{\ell'}{B} \quad \ell, \ell' \in \mathbb{N} \quad (\text{B.9})$$

(B.8) peut se simplifier comme suit :

$$\left| r_{ss}\left(\frac{\ell}{B}, \frac{\ell'}{B}\right) \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(\pi(\ell - \ell') \left(1 - \frac{1}{N} \left(\lceil \frac{\tau}{T_s} \rceil - \lfloor \frac{\tau'}{T_s} \rfloor\right)\right)\right)}{\sin\left(\pi \frac{\ell - \ell'}{N}\right)} \right| \quad (\text{B.10})$$

En effectuant un développement limité du numérateur et du dénominateur de (B.10), on aboutit à la propriété suivante :

**Propriété.**

$$\left| r_{ss}(\tau, \tau') \right|_{\tau=\frac{\ell}{B}, \tau'=\frac{\ell'}{B}} = |\text{sinc}(\pi(\ell - \ell'))| + O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (\text{B.11})$$

## B.2 Démonstration de la propriété 1

**Propriété.**

$$S_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} S = \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 \right) \quad (\text{B.12})$$

où  $z_1, \dots, z_Q$  sont  $Q$  variables aléatoires indépendantes telles que :

- en l'absence de cible :  $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ ,
- en présence de cible :  $z_1, \dots, z_K \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \gamma^2 + \sigma^2)$  et  $z_{K+1}, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$

On rappelle l'expression (2.69) de  $S_N$  :

$$S_N = \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_{\mathbf{i}}(\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}})^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y}\|^2 \right) \quad (\text{2.69})$$

où  $\mathbf{X}_{\mathbf{i}}$  est défini par :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i}} = \mathbf{D}_{f_0} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(\tau^{(1)}) & \mathbf{s}(\tau^{(2)}) & \dots & \mathbf{s}(\tau^{(K)}) \end{bmatrix} \quad (\text{2.42})$$

et  $\mathbf{y}$  par :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_{\mathbf{i}^{(0)}} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} \quad (\text{B.13})$$

avec  $\boldsymbol{\alpha} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^K}(0, \gamma^2 \mathbf{I}_K)$  et  $\mathbf{i}^{(0)}$  le vecteur colonne contenant les  $K$  indices inconnus relatifs aux positions des réflecteurs.

*Démonstration.* Nous procédons en deux étapes :

1) nous montrons d'abord que :

$$\frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_{\mathbf{i}}(\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}})^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y}\|^2 \right) - \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y}\|^2 \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (\text{B.14})$$

2) puis, nous montrons que :

$$\frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y}\|^2 \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} S = \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 \right) \quad (\text{B.15})$$

### 1) Première étape

Explicitons premièrement le produit  $\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}}$  à  $B, Q$  et  $\mathbf{i}$  fixés :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}(i_1 \delta)^H \mathbf{s}(i_1 \delta) & \mathbf{s}(i_1 \delta)^H \mathbf{s}(i_2 \delta) & \dots & \mathbf{s}(i_1 \delta)^H \mathbf{s}(i_K \delta) \\ \mathbf{s}(i_2 \delta)^H \mathbf{s}(i_1 \delta) & \mathbf{s}(i_2 \delta)^H \mathbf{s}(i_2 \delta) & \dots & \mathbf{s}(i_2 \delta)^H \mathbf{s}(i_K \delta) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{s}(i_K \delta)^H \mathbf{s}(i_1 \delta) & \dots & & \mathbf{s}(i_K \delta)^H \mathbf{s}(i_K \delta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

où :

$$\mathbf{s}(m\delta)^H \mathbf{s}(l\delta) = r_{ss}(m\delta, l\delta) \quad (\text{B.17})$$

D'après l'annexe B.1, lorsque le signal émis est une impulsion modulée linéairement en fréquence de bande  $B$  et de durée  $T$ , et que la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  et la bande passante  $B$  sont fixes,  $r_{ss}$  satisfait :

$$|r_{ss}(m\delta, l\delta)| = |\text{sinc}(\pi(m-l)B\delta)| + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (\text{B.4})$$

Dans ce cas, sachant que  $B\delta = 1$ , (B.16) vérifie :

$$|\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i| = \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (\text{B.18})$$

Le nombre  $Q$  de cases distance est fixe afin que les indices  $i_1, \dots, i_K$  soient fixes et ne tendent pas vers  $+\infty$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . La bande  $B$  est également fixée car  $Q$  est proportionnel à  $B$ .

Remarque : En supposant que les  $N$  échantillons des signaux rétrodiffusés par les  $K$  réflecteurs sont contenus dans les  $L$  échantillons du signal reçu, le fait d'avoir  $N \rightarrow +\infty$  implique que  $L \rightarrow +\infty$ .

L'hypothèse (B.18) peut s'interpréter comme le fait que les colonnes de la matrice  $\mathbf{X}_i$  tendent à s'orthonormaliser lorsque  $N \rightarrow +\infty$  avec  $B$  et  $Q$  fixés.

A présent, pour obtenir (B.14), montrons que  $\|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$  converge presque sûrement vers  $\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$ . Pour cela, nous utilisons un résultat qui est une conséquence du théorème de Borel-Cantelli [DUR10] et qui peut s'énoncer comme suit :

**Propriété 2.** *Soit une variable aléatoire  $Z_N$  dépendant de la variable  $N$ . Si, pour un certain entier  $p > 1$ , on a :*

$$\mathbb{E}[(Z_N)^p] = O\left(\frac{1}{N^p}\right) \quad (\text{B.19})$$

*alors  $Z_N$  converge presque sûrement vers 0.*

Pour utiliser cette propriété, nous montrons que  $\mathbb{E} \left[ \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right|^2 \right]$  est majoré par un terme en  $O(1/N^2)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right| &\leq \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| + \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| \right| \\ &\quad \times \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| \right| \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

En appliquant une propriété issue de l'inégalité triangulaire au second terme de droite de (B.20), il vient :

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right| &\leq \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| + \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| \right| \\ &\quad \times \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y} - \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| \right| \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

En réarrangeant le second terme de (B.21), il vient :

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right| &\leq \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| + \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| \right| \\ &\quad \times \left| \|\mathbf{X}_i((\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} - \mathbf{I}_K) \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\| \right| \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

On rappelle que la norme spectrale d'une matrice complexe  $\mathbf{A}$  de taille  $L \times K$  par exemple, est définie par :

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^K} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} \quad (\text{B.23})$$

En particulier, cette norme vérifie :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{z}\| \quad (\text{B.24})$$

En tenant compte de (B.24) dans (B.22), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right| &\leq \|\mathbf{X}_i\| \left( \|\mathbf{X}_i\| \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i\|^{-1} + 1 \right) \|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} - \mathbf{I}_K\| \\ &\quad \times \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

On veut alors appliquer la propriété 2 avec  $p = 2$  à la variable :

$$Z_N = \|\mathbf{X}_i\| \left( \|\mathbf{X}_i\| \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i\|^{-1} + 1 \right) \|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} - \mathbf{I}_K\| \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \quad (\text{B.26})$$

Pour cela, on s'intéresse aux termes numérotés ①, ② et ③ de  $\mathbb{E}[Z_N^2]$  définis par :

$$\mathbb{E}[Z_N^2] = \underbrace{\|\mathbf{X}_i\|^2}_{\text{①}} \underbrace{\left( \|\mathbf{X}_i\| \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i\|^{-1} + 1 \right)^2}_{\text{②}} \underbrace{\|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} - \mathbf{I}_K\|^2}_{\text{③}} \mathbb{E}[\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^4] \quad (\text{B.27})$$

- ① Sachant que  $\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \mathbf{I}_K$ ,  $\Lambda_1$  tend vers 1 lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , cela implique qu'à partir d'un certain  $N$  suffisamment grand,  $\|\mathbf{X}_i\|^2$  est bornée par un terme proche de 1. On peut borner  $\|\mathbf{X}_i\|^2$  par 2 par exemple. En procédant de la même manière, on en déduit qu'à partir d'un certain  $N$  suffisamment grand :

$$\|\mathbf{X}_i\| \leq \sqrt{2} \quad (\text{B.28})$$

$$\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i\|^2 \leq 4 \quad (\text{B.29})$$

$$\|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1}\|^2 \leq 4 \quad (\text{B.30})$$

- ② D'après (B.4), on a :

$$\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i = \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (\text{B.31})$$

Dans ce cas, il vient :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} - \mathbf{I}_K\|^2 &\leq \|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1}\|^2 \|\mathbf{I}_K - (\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)\|^2 \\ &= \|(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1}\|^2 O\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

- ③ le dernier terme est  $\mathbb{E}[\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^4]$ .

– Sous  $H_1$ , d'après la définition (B.13) du vecteur  $\mathbf{y}$ , on a :

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^4] = \mathbb{E}\left[\|\mathbf{X}_i^H (\gamma^2 \mathbf{X}_{i(0)} \mathbf{X}_{i(0)}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_L)^{1/2} \mathbf{w}\|^4\right] \quad (\text{B.33})$$

où  $\mathbf{w}$  est un vecteur colonne tel que  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^L}(0, \mathbf{I}_L)$ .

On pose alors :

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_i^H (\gamma^2 \mathbf{X}_{i(0)} \mathbf{X}_{i(0)}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_L)^{1/2} \quad (\text{B.34})$$



En particulier, cette matrice vérifie :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{X}_i^H (\gamma^2 \mathbf{X}_{i(0)} \mathbf{X}_{i(0)}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_L) \mathbf{X}_i \quad (\text{B.35})$$

A partir de (B.4), (B.35) satisfait :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \gamma^2 \mathbf{I}_K^{(\mathbf{i}-\mathbf{i}^{(0)})} + \sigma^2 \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (\text{B.36})$$

où  $\mathbf{I}_K^{(\mathbf{i}-\mathbf{i}^{(0)})}$  est une matrice diagonale de taille  $K \times K$  dont le  $k^{ime}$  élément vaut un si  $i_k$  est égal à l'une des vraies positions de la cible  $i_1^{(0)}, \dots, i_K^{(0)}$ .

Ainsi, pour un  $N$  suffisamment grand :

$$\mathbb{E} [\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^4] \leq c \quad (\text{B.37})$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $N$ .

– Sous  $H_0$ , il suffit de poser  $\gamma^2 = 0$  pour aboutir au même résultat.

En tenant compte de (B.28)-(B.30), (B.32) et (B.37), il vient :

$$\mathbb{E} [Z_N^2] \leq \sqrt{2}(2\sqrt{2} + 1)c \times O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (\text{B.38})$$

Le terme  $\sqrt{2}(2\sqrt{2} + 1)c$  est une constante indépendante de  $N$ , donc d'après la propriété 2, on en déduit que  $\|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$  converge presque sûrement vers  $\|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2$ , c'est-à-dire :

$$\frac{2}{\sigma^2} \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \left| \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right| \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (\text{B.39})$$

Il reste alors à montrer que :

$$\frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i^H \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right) - \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_i^H \mathbf{y}\|^2 \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (\text{B.40})$$

Pour cela, nous introduisons le lemme suivant :

**Lemme 3.** Pour  $1 \leq m, \ell \leq K$ , soient  $(x_{m,N})_{N \geq 0}$  et  $(y_{\ell,N})_{N \geq 0}$  deux suites positives telles que :

$$\max_{1 \leq m \leq K} |x_{m,N} - y_{m,N}| \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{B.41})$$

Supposons également que pour tout  $N \geq 0$ , les fonctions  $m \mapsto x_{m,N}$  et  $\ell \mapsto y_{\ell,N}$  admettent un maximum unique sur  $\llbracket 1; K \rrbracket$ . Alors :

$$\left| \max_{1 \leq m \leq K} x_{m,N} - \max_{1 \leq \ell \leq K} y_{\ell,N} \right| \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{B.42})$$

*Démonstration.* De par l'unicité des maxima, on définit :

$$m_N^* = \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq K} x_{m,N} \quad (\text{B.43})$$

et :

$$\ell_N^* = \operatorname{argmax}_{1 \leq \ell \leq K} y_{\ell,N} \quad (\text{B.44})$$

Supposons que la suite  $\left(\left|x_{m_N^*,N} - y_{\ell_N^*,N}\right|\right)_{N \geq 0}$  ne converge pas vers 0. Alors il existe  $\delta > 0$  et une sous-suite  $\phi(N)$  tels que :

$$\liminf_{N \geq 0} \left| x_{m_{\phi(N)}^*, \phi(N)} - y_{\ell_{\phi(N)}^*, \phi(N)} \right| \geq 2\delta \quad (\text{B.45})$$

Soit  $N$  grand tel que :

$$\max \left| x_{m_{\Phi(N)}^*, \Phi(N)} - y_{m_{\Phi(N)}^*, \Phi(N)} \right| \leq \delta \quad (\text{B.46})$$

et supposons sans perte de généralité que pour ce  $N$ ,

$$x_{m_{\Phi(N)}^*, \Phi(N)} \geq y_{\ell_{\Phi(N)}^*, N} + 2\delta \quad (\text{B.47})$$

Alors :

$$y_{m_{\Phi(N)}^*, N} \geq y_{\ell_{\Phi(N)}^*, N} + \delta \quad (\text{B.48})$$

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse de départ.  $\square$

D'après le lemme 3, on a convergence des maxima.

## 2) Seconde étape

La dernière étape consiste à montrer que :

$$\frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in [1;Q]^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} \|\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y}\|^2 \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} S = \frac{2}{\sigma^2} \left( \max_{\substack{\mathbf{i} \in [1;Q]^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} |z_{i_1}|^2 + \dots + |z_{i_K}|^2 \right) \quad (\text{B.49})$$

Pour cela, à  $\mathbf{i}$  fixé, et en utilisant la définition (B.13) du vecteur  $\mathbf{y}$ , on a :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^K} \left( 0, \gamma^2 \mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}(0)} \mathbf{X}_{\mathbf{i}(0)}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}} + \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{X}_{\mathbf{i}} \right) \quad (\text{B.50})$$

D'après (B.4), on en déduit :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^H \mathbf{y} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{C}^K} \left( 0, \gamma^2 \mathbf{I}_K^{(\mathbf{i}-\mathbf{i}^{(0)})} + \sigma^2 \mathbf{I}_K \right) \quad (\text{B.51})$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{I}_K^{(\mathbf{i}-\mathbf{i}^{(0)})}$  est une matrice diagonale de taille  $K \times K$  dont le  $k^{ime}$  élément vaut un si  $i_k$  est égal à l'une des vraies positions de la cible  $i_1^{(0)}, \dots, i_K^{(0)}$ .

En particulier, en posant :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}=[1, \dots, Q]^T} \quad (\text{B.52})$$

et en notant que l'on suppose la cible dans les  $K$  premières cases distance sans perte de généralité, on aboutit à :

$$\mathbf{X}^H \mathbf{y} = \begin{bmatrix} z_{1,N} \\ \vdots \\ z_{Q,N} \end{bmatrix} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{C}^K} \left( 0, \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_K & \mathbf{0}_{K,Q-K} \\ \mathbf{0}_{Q-K,K} & \mathbf{0}_{Q-K,Q-K} \end{bmatrix} + \sigma^2 \mathbf{I}_Q \right) \quad (\text{B.53})$$

où  $\mathbf{0}_{K,Q-K}$  est la matrice de zéros de taille  $K \times (Q - K)$ .

Pour terminer, on introduit la fonction  $\Phi$  définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{C}^Q &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \left[ \begin{array}{ccc} u_1 & \cdots & u_Q \end{array} \right]^T &\mapsto \max_{\substack{\mathbf{i} \in \llbracket 1; Q \rrbracket^K \\ i_1, \dots, i_K \text{ distincts}}} |u_{i_1}|^2 + \dots + |u_{i_K}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Sachant que la fonction  $\Phi$  est continue, on a donc :

$$\Phi \left( \left[ \begin{array}{ccc} z_{1,N} & \cdots & z_{Q,N} \end{array} \right]^T \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \Phi \left( \left[ \begin{array}{ccc} z_1 & \cdots & z_Q \end{array} \right]^T \right) \quad (\text{B.55})$$

où  $z_1, \dots, z_Q$  sont  $Q$  variables aléatoires indépendantes telles que :

- en l'absence de cible :  $z_1, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ ,
- en présence de cible :  $z_1, \dots, z_K \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \gamma^2 + \sigma^2)$  et  $z_{K+1}, \dots, z_Q \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$

En remplaçant la fonction  $\Phi$  par sa définition et  $[z_{1,N} \dots z_{Q,N}]^T$  par  $\mathbf{X}^H \mathbf{y}$ , on aboutit au résultat (B.49).

□

### B.3 Démonstration du lemme 1

Le lemme 1 est donné par :

**Lemme.** Soient  $Q$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_Q$  indépendantes et distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$ . Soient  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(Q)}$  les variables aléatoires ordonnées telles que  $X_{(1)} > X_{(2)} > \dots > X_{(Q)}$ .

Alors :

$$\mathbb{P}(X_{(1)} + \dots + X_{(K)} > \epsilon) = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q}}{\lambda_{i_1} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) \dots (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q})} \mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon) \quad (2.78)$$

avec  $\Omega_Q$  l'ensemble des  $Q!$  permutations de  $\{1, \dots, Q\}$  et  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  les  $Q$  variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  définis par :

$$\theta_{i_q} = \begin{cases} \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{q} & q = 1, \dots, K \\ \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{K} & q = K + 1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.79)$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, on peut réécrire la probabilité  $\mathbb{P}(X_{(1)} + \dots > X_{(K)} > \epsilon)$  en tenant compte de l'ensemble des ordonnancements possibles entre les  $Q$  variables  $X_1, \dots, X_Q$  :

$$\mathbb{P}(X_{(1)} + \dots > X_{(K)} > \epsilon) = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \mathbb{P}(X_{i_1} + \dots + X_{i_K} > \epsilon, X_{i_1} > \dots > X_{i_Q}) \quad (B.56)$$

Sachant que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_Q$  sont indépendantes, les probabilités  $\mathbb{P}(X_{i_1} + \dots + X_{i_K} > \epsilon, X_{i_1} > \dots > X_{i_Q})$  vérifient :

$$\mathbb{P}(X_{i_1} + \dots + X_{i_K} > \epsilon, X_{i_1} > \dots > X_{i_Q}) = \int_{\mathcal{D}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q} \exp(-(\lambda_{i_1} x_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q} x_{i_Q})) dx_{i_1} \dots dx_{i_Q} \quad (B.57)$$

où l'ensemble  $\mathcal{D}$  est défini par :

$$\mathcal{D} = \{x_{i_1} + \dots + x_{i_K} > \epsilon, x_{i_1} > \dots > x_{i_Q}\} \quad (B.58)$$

On considère alors le changement de variable  $Y_{i_q} = X_{i_q} - X_{i_{q+1}}$ ,  $q = 1, \dots, Q - 1$  et  $Y_{i_Q} = X_{i_Q}$  :

$$y_{i_1} = x_{i_1} - x_{i_2} ; y_{i_2} = x_{i_2} - x_{i_3} ; \dots ; y_{i_{Q-1}} = x_{i_{Q-1}} - x_{i_Q} ; y_{i_Q} = x_{i_Q} \quad (B.59)$$

L'inversion du système (B.59) peut s'écrire comme suit :

$$x_{i_1} = y_{i_1} + y_{i_2} + \dots + y_{i_Q} ; x_{i_2} = y_{i_2} + \dots + y_{i_Q} ; \dots ; x_{i_{Q-1}} = y_{i_{Q-1}} + y_{i_Q} ; x_{i_Q} = y_{i_Q} \quad (B.60)$$

Dans ce cas, en intégrant le changement de variable (B.60) dans (B.56), il vient, après réarrangement des termes dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(1)} + \dots > X_{(K)} > \epsilon) = \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \int_{\mathcal{D}'} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q} \exp(-(\lambda_{i_1} y_{i_1} + (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) y_{i_2} + \dots \\ + (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q}) y_{i_Q})) \det(\mathbf{A}) dy_{i_1} \dots dy_{i_Q} \end{aligned} \quad (B.61)$$

où l'ensemble  $\mathcal{D}'$  est défini par :

$$\mathcal{D}' = \{y_{i_1} + 2y_{i_2} + \dots + Ky_{i_K} + K(y_{i_{K+1}} + \dots + y_{i_Q}) > \epsilon, y_{i_1}, \dots, y_{i_Q} \in \mathbb{R}^+\} \quad (\text{B.62})$$

et où  $\mathbf{A}$  est la matrice Jacobienne associée au changement de variable (B.59) et définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

Enfin, on effectue un second changement de variable en posant :

$$\Delta_{i_q} = \begin{cases} qy_{i_q} & q \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ Ky_{i_q} & q \in \llbracket K+1, Q \rrbracket \end{cases} \quad (\text{B.64})$$

En insérant ce changement de variable dans (B.61) et sachant que  $\det(\mathbf{A}) = 1$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(1)} + \dots + X_{(K)} > \epsilon) &= \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \int_{\mathcal{D}''} \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q}}{K! K^{Q-K}} \exp \left( - \left[ \lambda_{i_1} \Delta_{i_1} + \frac{\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}}{2} \Delta_{i_2} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_K}}{K} \Delta_{i_K} + \frac{1}{K} ((\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{K+1}}) \Delta_{i_{K+1}} + \dots + (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q}) \Delta_{i_Q}) \right] \right) d\Delta_{i_1} \dots d\Delta_{i_Q} \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

où l'ensemble  $\mathcal{D}''$  est défini par :

$$\mathcal{D}'' = \{\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon, \Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q} \in \mathbb{R}^+\} \quad (\text{B.66})$$

On introduit les  $Q$  densités de probabilité exponentielles  $f_{\theta_{i_1}}, \dots, f_{\theta_{i_Q}}$  des variables aléatoires  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$ , dont les paramètres respectifs  $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_Q}$  sont définis par (2.79) :

$$\theta_{i_q} = \begin{cases} \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{q} & q = 1, \dots, K \\ \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_q}}{K} & q = K+1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.79)$$

Dans ce cas, (B.65) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(1)} + \dots + X_{(K)} > \epsilon) &= \sum_{[i_1, \dots, i_Q] \in \Omega_Q} \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_Q}}{\lambda_{i_1} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) \dots (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_Q})} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{D}''} f_{\theta_{i_1}}(\Delta_{i_1}) \dots f_{\theta_{i_Q}}(\Delta_{i_Q}) d\Delta_{i_1} \dots d\Delta_{i_Q} \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

Dans (B.67), la densité de probabilité du  $Q$ -uplet  $(\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q})$  s'exprime comme le produit des densités de probabilités des variables  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$ . Les variables  $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_Q}$  sont indépendantes. Enfin, on note que l'intégrale sur l'ensemble  $\mathcal{D}''$  correspond à la probabilité  $\mathbb{P}(\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_Q} > \epsilon)$ .

□

## B.4 Démonstration du lemme 2

Le lemme 2 est donné par :

**Lemme.** Soient  $Q$  variables aléatoires indépendantes notées  $Z_1, \dots, Z_Q$  telles que  $Z_1, \dots, Z_K$  sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\phi_0$  et  $Z_{K+1}, \dots, Z_Q$  sont distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\phi_1, \dots, \phi_{Q-K}$  avec  $\phi_1, \dots, \phi_{Q-K}$  tous différents.

Dans ce cas :

- la somme  $S_1 = Z_1 + \dots + Z_K$  est distribuée selon une loi Gamma de paramètres  $K$  et  $\phi_0$  ;
- la somme  $S_2 = Z_{K+1} + \dots + Z_Q$  est distribuée selon une loi Hypo-exponentielle.

La densité de probabilité de la somme  $S = S_1 + S_2$  est alors donnée par :

$$p_S(y) = \begin{cases} \frac{\mu(\phi_0)^K}{(K-1)!} \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q,Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \exp((- \phi_q)y) p_\gamma(\phi_0 - \phi_q y; K) & y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.84)$$

où  $p_\gamma$  désigne la fonction Gamma incomplète inférieure et où  $\mu$  et  $\beta_{q,Q-K}$  sont définis par :

$$\mu = \prod_{j=1}^{Q-K} \phi_j \quad (2.86)$$

$$\beta_{q,Q-K} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{Q-K} \frac{1}{\phi_j - \phi_q} \quad (2.87)$$

*Démonstration.*  $S_1$  est distribuée selon une loi Gamma de paramètres  $K$  et  $\phi_0$  dont la densité de probabilité est donnée par :

$$p_{S_1}(x) = \begin{cases} \frac{(\phi_0)^K}{(K-1)!} x^{K-1} \exp(-\phi_0 x) & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (B.68)$$

$S_2$  est distribuée selon une loi Hypo-exponentielle dont la densité de probabilité est donnée par [BAL06, p. 178] :

$$p_{S_2}(x) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{Q-K} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{Q-K} \frac{\phi_j}{\phi_j - \phi_q} \right) \phi_q \exp(-\phi_q x) & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (B.69)$$

Afin de faciliter la lecture, on pose :

$$\mu = \prod_{j=1}^{Q-K} \phi_j \quad (2.86)$$

et :

$$\beta_{q,Q-K} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{Q-K} \frac{1}{\phi_j - \phi_q} \quad (2.87)$$

(B.69) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$p_{S_2}(x) = \begin{cases} \mu \sum_{q=1}^{Q-K} \beta_{q,Q-K} \exp(-\phi_q x) & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.70})$$

La densité de probabilité  $p_S$  de  $S$  est donnée par :

$$p_S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{S_1}(x) p_{S_2}(y-x) dx \quad (\text{B.71})$$

Sachant que les fonctions  $p_{S_1}$  et  $p_{S_2}$  sont définies sur  $\mathbb{R}^+$ , les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale (B.71) se limitent à 0 et  $y$  respectivement. En tenant compte des expressions (B.68) et (B.70), on a, pour  $y > 0$  :

$$\begin{aligned} p_S(y) &= \int_0^y \frac{(\phi_0)^K}{(K-1)!} x^{K-1} \exp(-\phi_0 x) \times \left( \mu \sum_{q=1}^{Q-K} \beta_{q,Q-K} \exp(-\phi_q(y-x)) \right) dx \\ &= \frac{\mu(\phi_0)^K}{(K-1)!} \sum_{q=1}^{Q-K} \beta_{q,Q-K} \exp((- \phi_q) y) \left[ \int_0^y x^{K-1} \exp(-(\phi_0 - \phi_q)x) dx \right] \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

L'intégrale sur la variable  $x$  dans (B.72) peut s'écrire à partir de la fonction Gamma incomplète inférieure<sup>22</sup>  $p_\gamma$ . En effet, par un changement de variable, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^y x^{K-1} \exp(-(\phi_0 - \phi_q)x) dx &= \int_0^{(\phi_0 - \phi_q)y} \left( \frac{t}{\phi_0 - \phi_q} \right)^{K-1} \exp(-t) \frac{dt}{\phi_0 - \phi_q} \\ &= \frac{1}{(\phi_0 - \phi_q)^K} p_\gamma((\phi_0 - \phi_q)y; K) \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

En incluant (B.73) dans (B.72), on aboutit à :

$$p_S(y) = \begin{cases} \frac{\mu(\phi_0)^K}{(K-1)!} \sum_{q=1}^{Q-K} \frac{\beta_{q,Q-K}}{(\phi_0 - \phi_q)^K} \exp((- \phi_q) y) p_\gamma((\phi_0 - \phi_q)y; K) & y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.84)$$

□

22. La loi Gamma incomplète inférieure  $p_\gamma$  est définie en Annexe A.

## Annexe C

# Annexes relatives au chapitre 3

### C.1 Expression de l'inverse de la matrice de covariance pour un processus AR(p)

L'inverse de la matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}$  d'un processus AR d'ordre  $p$  s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} (\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H) \quad (\text{C.1})$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^n \quad (\text{C.2})$$

et :

$$\tilde{\mathbf{G}} = - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-n} \quad (\text{C.3})$$

où  $\mathbf{I}_{MN\tilde{L}}$  est la matrice identité de taille  $MN\tilde{L} \times MN\tilde{L}$ .

Étant donné (C.2), il vient :

$$\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H = \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^n - \sum_{n=1}^p a_n (\tilde{\mathbf{J}}^n)^H + \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^n (\tilde{\mathbf{J}}^l)^H \quad (\text{C.4})$$

Analysons le dernier terme dans (C.4). Selon les valeurs de  $n$  et  $l$ , la matrice  $\tilde{\mathbf{J}}^n (\tilde{\mathbf{J}}^l)^H$  a des expressions différentes. Pour  $n = l$  :

$$\tilde{\mathbf{J}}^n (\tilde{\mathbf{J}}^n)^H = \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H \quad (\text{C.5})$$

Pour  $l < n$ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}^n (\tilde{\mathbf{J}}^l)^H &= \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} \tilde{\mathbf{J}}^l (\tilde{\mathbf{J}}^l)^H \\ &\stackrel{(\text{C.5})}{=} \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} \left( \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H \right) \\ &= \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} - \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k+n-l} \tilde{\mathbf{e}}_k^H \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$



et pour  $l > n$ , il vient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{J}}^n(\tilde{\mathbf{J}}^l)^H &= \tilde{\mathbf{J}}^n(\tilde{\mathbf{J}}^n)^H(\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H \\
 &\stackrel{(C.5)}{=} \left( \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H \right) (\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H \\
 &= (\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H - \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_{k+l-n}^H
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Ainsi, d'après (C.5), (C.6) et (C.7), le dernier terme dans (C.4) satisfait :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^n(\tilde{\mathbf{J}}^l)^H &= \sum_{n=1}^p a_n^2 \tilde{\mathbf{J}}^n(\tilde{\mathbf{J}}^n)^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^n(\tilde{\mathbf{J}}^l)^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^n(\tilde{\mathbf{J}}^l)^H \\
 &= \sum_{n=1}^p a_n^2 \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n^2 \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l (\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H - \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_{k+l-n}^H \\
 &\quad + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} - \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k+n-l} \tilde{\mathbf{e}}_k^H
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

En insérant (C.8) dans (C.4) et en regroupant les termes qui dépendent de  $\mathbf{I}_{MN\tilde{L}}$  et  $\tilde{\mathbf{J}}$  d'un côté et les autres termes de l'autre côté, le produit  $\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H$  vérifie :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^H &= \left[ \left( 1 + \sum_{n=1}^p a_n^2 \right) \mathbf{I}_{MN\tilde{L}} - \sum_{n=1}^p a_n \tilde{\mathbf{J}}^n - \sum_{n=1}^p a_n (\tilde{\mathbf{J}}^n)^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l (\tilde{\mathbf{J}}^{l-n})^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^{n-l} \right] \\
 &\quad - \left[ \sum_{n=1}^p a_n^2 \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^H + \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{l>n} a_n a_l \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_{k+l-n}^H + \sum_{n=2}^p \sum_{l<n} a_n a_l \sum_{k=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k+n-l} \tilde{\mathbf{e}}_k^H \right]
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

A présent, on développe le terme  $\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H$ . Pour cela, on note la propriété suivante :

$$\tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-n} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-n+k} \tilde{\mathbf{e}}_k^H, \quad n = 1, \dots, MN\tilde{L} - 1 \tag{C.10}$$

$\tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-1}$  vérifie  $\tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-1} = \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}} \tilde{\mathbf{e}}_1^H$ .

Aussi, en combinant (C.3) et (C.10),  $\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H$  vérifie :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H &\stackrel{(C.3)}{=} \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-n} (\tilde{\mathbf{J}}^{MN\tilde{L}-l})^H \\
 &\stackrel{(C.10)}{=} \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \sum_{k_1=1}^n \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-n+k_1} \tilde{\mathbf{e}}_{k_1}^H \sum_{k_2=1}^l \tilde{\mathbf{e}}_{k_2} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-l+k_2}^H
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Sachant que  $\tilde{\mathbf{e}}_{k_1}^H \tilde{\mathbf{e}}_{k_2} = 1$  si  $k_1 = k_2$  et 0 sinon  $\forall (k_1, k_2) \in \llbracket 1; MN\tilde{L} \rrbracket$ , (C.11) devient :

$$\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^H = \sum_{n=1}^p \sum_{l=1}^p a_n a_l \sum_{k=1}^{\min(n,l)} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-n+k} \tilde{\mathbf{e}}_{MN\tilde{L}-l+k}^H \tag{C.12}$$

L'inverse de la matrice de covariance d'un processus AR d'ordre  $p$  peut donc s'écrire en fonction des paramètres AR et de la variance du processus générateur à partir de (C.1), (C.9) et (C.12).

## C.2 Propriété de la fonction d'autocorrélation $r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}$

Premièrement, on rappelle que le code  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}$  peut s'exprimer à partir des échantillons du signal émis  $x$  échantillonné à  $T_c$  :

$$x(t)|_{t=nT_c} = \sum_{k=0}^{K-1} c_k p(nT_c - kT_r) \quad (\text{C.13})$$

où  $T_r$  et  $T$  sont des multiples entiers de  $T_c$  et où l'impulsion  $p$  est définie par :

$$p(t)|_{t=nT_c} = \sum_{m=0}^{M-1} d_m \Pi_{T_c}(nT_c - mT_c) \quad (\text{C.14})$$

avec  $\Pi_{T_c}$  l'impulsion rectangulaire de durée  $T_c$ .

La fonction d'autocorrélation  $r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}$  peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(i) &= \sum_n x(nT_c) x^*(nT_c - iT_c) \\ &= \sum_n \left( \sum_{k=0}^{K-1} c_k p(nT_c - kT_r) \right) \left( \sum_{l=0}^{K-1} c_l p(nT_c - lT_r - iT_c) \right)^* \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{K-1} c_k c_l^* \sum_n p(nT_c - kT_r) p^*(nT_c - lT_r - iT_c) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

En remarquant que :

$$\sum_n p(nT_c - kT_r) p^*(nT_c - lT_r - iT_c) = \chi_p(iT_c - (k-l)T_r) \quad (\text{C.16})$$

il vient :

$$r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(i) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{K-1} c_k c_l^* \chi_p(iT_c - (k-l)T_r) \quad (\text{C.17})$$

En posant  $q = k - l$  et en réarrangeant<sup>23</sup> les termes de la double somme, on peut réécrire (C.17) comme suit :

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(i) &= \sum_{q=-K+1}^0 \sum_{k=0}^{K-1-|q|} c_k c_{k-q}^* \chi_p(iT_c - qT_r) + \sum_{q=1}^{K-1} \sum_{l=0}^{K-1-|q|} c_{q+l} c_l^* \chi_p(iT_c - qT_r) \\ &= \sum_{q=-K+1}^0 \chi_p(iT_c - qT_r) \sum_{k=0}^{K-1-|q|} c_k c_{k-q}^* + \sum_{q=1}^{K-1} \chi_p(iT_c - qT_r) \sum_{l=0}^{K-1-|q|} c_{q+l} c_l^* \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

---

23. La double somme dans (C.17) peut être vue comme l'addition de tous les termes d'une matrice. Pour faciliter la compréhension, on note  $\mathbf{A}$  la matrice composée des éléments  $(a_{n,l})_{1 \leq n, l \leq L}$ . La double somme  $\sum_{n=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} a_{n,l}$  consiste à additionner les éléments de gauche à droite puis de haut en bas, c'est-à-dire  $a_{1,1} + a_{1,2} + \dots + a_{N-1,N} + a_{N,N}$ . Une seconde façon de procéder est de décomposer la matrice  $\mathbf{A}$  en la somme d'une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{A}_s$  incluant la diagonale et d'une matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{A}_i$ . La double somme  $\sum_{q=-(L-1)}^0 \sum_{n=0}^{L-1-|q|} a_{n,n+q}$  additionne les termes de  $\mathbf{A}_s$  en diagonal en commençant par la plus petite diagonale contenant le seul terme  $a_{1,N}$ , c'est-à-dire :  $(a_{1,N}) + (a_{1,N-1} + a_{2,N}) + \dots + (a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{N,N})$  (entre parenthèses, les termes d'une même diagonale). La double somme  $\sum_{q=1}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1-|q|} a_{q+l,l}$  procède de la même manière pour la matrice  $\mathbf{A}_i$  en commençant par la sous-diagonale.

Sachant que :

$$\sum_{l=0}^{K-1-|q|} c_{q+l} c_l^* = r_{\mathbf{c}}(q) \text{ pour } q \geq 0 \quad (\text{C.19})$$

avec  $r_{\mathbf{c}}$  la fonction d'autocorrélation du code  $\mathbf{c}$ .

On a également, pour  $q \leq 0$  :

$$\sum_{l=0}^{K-1-|q|} c_{l-q}^* c_l = r_{\mathbf{c}}^*(-q) = r_{\mathbf{c}}(q) \quad (\text{C.20})$$

et on obtient finalement :

$$r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(i) = \sum_{q=-K+1}^{K-1} \chi_p(iT_c - qT_r) r_{\mathbf{c}}(q) \quad (\text{C.21})$$

Sachant (C.14),  $\chi_p(iT_c)$  vaut :

$$\begin{aligned} \chi_p(iT_c) &= \sum_n p(nT_c) p^*(nT_c - iT_c) \\ &\stackrel{(\text{C.14})}{=} \sum_n \left( \sum_{m=0}^{M-1} d_m \Pi_{T_c}(nT_c - mT_c) \right) \left( \sum_{l=0}^{M-1} d_l \Pi_{T_c}(nT_c - lT_c - iT_c) \right)^* \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Les termes  $\Pi_{T_c}(nT_c - mT_c)$  et  $\Pi_{T_c}(nT_c - lT_c - iT_c)$  ont des supports temporels disjoints pour tous les triplets  $\{m, l, i\}$  sauf pour  $m = l + i$ . Dans ce cas, il vient :

$$\begin{aligned} \chi_p(iT_c) &= \sum_n \sum_{m=0}^{M-1} d_m \Pi_{T_c}(nT_c - mT_c) d_{m-i}^* \Pi_{T_c}(nT_c - mT_c) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} d_m d_{m-i}^* \\ &= r_{\mathbf{d}}(i) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

avec  $r_{\mathbf{d}}$  la fonction d'autocorrélation du code de phase  $\mathbf{d}$ . Ainsi, étant donné (C.23), (C.21) peut se réécrire en fonction de  $r_{\mathbf{d}}$  comme suit :

$$r_{\mathbf{c} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{d}}(i) = \sum_{q=-K+1}^{K-1} r_{\mathbf{d}}(i - qMN) r_{\mathbf{c}}(q) \quad (\text{C.24})$$

La fonction  $\tilde{r}_1$  fait donc intervenir les fonctions  $r_{\mathbf{c}}$  et  $r_{\mathbf{d}}$ .

# Bibliographie

- [ABR08] Y. I. Abramovich, B. A. Johnson and N. K. Spencer, “Two-Dimensional Multivariate Parametric Models for Radar Applications - Part I: Maximum-Entropy Extensions for Toeplitz-Block-Matrices,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, n°11, pp. 5509 – 5526, 2008.
- [AND00] D. Andersh, J. Moore, S. Kosanovich, D. Kapp, R. Bhalla, R. Kipp, T. Courtney, A. Nolan, F. German, J. Cook and J. Hughes, “Xpatch 4: the Next Generation in High Frequency Electromagnetic Modeling and Simulation Software,” *Records of the IEEE International Radar Conference*, pp. 844 – 849, 2000.
- [BAD15] J. M. Baden, M. S. Davis and L. Schmieder, “Efficient Energy Gradient Calculations for Binary and Polyphase Sequences,” *IEEE Radar Conference (RadarCon)*, pp. 304 – 309, 2015.
- [BAL06] N. Balakrishnan, E. Castillo and J. S. Sarabia, *Advances in Distribution Theory, Order Statistics and Inference*, Birkhäuser, 2006.
- [BER05] J. S. Bergin, P. M. Techau, J. E. Don Carlos and J. R. Guerci, “Radar Waveform Optimization for Colored Noise Mitigation,” *Proceedings of the IEEE International Radar Conference*, pp. 149 – 154, 2005.
- [BHA09] C. Bhattacharya and P. Mahapatra, “A Generalized Approach to Multiresolution Complex SAR Signal Processing,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 45, n°3, pp. 1089–1103, 2009.
- [BHA11] T. D. Bhatt, E. G. Rajan and P. V. D. S. Rao, “Design of High-Resolution Radar Waveforms for Multi-Radar and Dense Target Environments,” *IET Radar, Sonar, Navigation*, Vol. 5, n°7, pp. 716 – 725, 2011.
- [BIL02] J. B. Billingsley, *Low-Angle Radar Land Clutter: Measurements and Empirical Models*, William Andrew Publishing, 2002.
- [BOY04] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [BRE15] A. Breloy, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, “Clutter Subspace Estimation in Low Rank Heterogeneous Noise Context,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 63, n°9, pp. 2173–2182, 2015.
- [CER91] B. Cernuschi-Frias, “A Derivation of the Gohberg-Semencul Relation [Signal Analysis],” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, n°1, pp. 190–192, 1991.
- [CHA83] V. Chankong and Y. Haimes, Eds., *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, Elsevier Science Publishing, 1983.

- [CHE08] D. Chebanov and A. B. Davydov, “An Algorithm for Selection of Stepped-frequency Pulse Trains with Low Sidelobes,” *Proceedings of the 40th Southeastern Symposium on System Theory*, pp. 59–63, 2008.
- [CHE14] R. Chellappa and S. Theodoridis, Eds., *Academic Press Library in Signal Processing: Volume 2 Communications and Radar Signal Processing*, Academic Press, 2014.
- [COE07] C. A. Coello Coello, G. B. Lamont and D. A. Van Veldhuizen, *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-objective Problems*, Springer, 2007.
- [CUI14] G. Cui, A. De Maio, V. Carotenuto and L. Pallotta, “Performance Prediction of the Incoherent Detector for a Weibull Fluctuating Target,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 50, n°3, pp. 275–279, 2014.
- [DAR81] J. Darricau, *Principe et Théorie du Radar*, Sodipe, 1981.
- [DE 04] A. De Maio, A. Farina and G. Foglia, “Target Fluctuation Models and their Application to Radar Performance Prediction,” *IEE Proceedings - Radar, Sonar, Navigation*, Vol. 151, n°5, pp. 261–270, 2004.
- [DE 08] S. De Nicola, Y. Huang, A. De Maio, S. Zhang and A. Farina, “Code Optimization with Similarity and Accuracy Constraints,” *Proceedings of the IEEE Radar Conference*, pp. 1–6, 2008.
- [DE 09a] A. De Maio, S. De Nicola, Y. Huang, L. Zhi-Quan and S. Zhang, “Design of Phase Codes for Radar Performance Optimization with a Similarity Constraint,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 57, n°2, pp. 610–621, 2009.
- [DE 09b] A. De Maio and A. Farina, “Waveform Diversity: Past, Present and Future,” *Technical Report OTAN*, n°RTO-EN-SET-119, 2009.
- [DE 10] A. De Maio, Y. Huang and M. Piezzo, “A Doppler Robust Max-Min Approach to Radar Code Design,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 58, n°9, pp. 4943–4947, 2010.
- [DEU11] F. Deudon. *Traitements Radar Large Bande : Apport de la Migration Distance pour l’Obtention d’un Mode Non-Ambigu*. Thèse de Doctorat, Université de Toulouse, 2011. Directeurs de thèse : J.-Y. Tourneret et O. Besson.
- [DOW03] M. Dow, “Explicit Inverses of Toeplitz and Associated Matrices,” *Australian/New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal (ANZIAM)*, Vol. 44, n°E, pp. 185–215, 2003.
- [DUR10] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 2010.
- [EHR05] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization, Second Edition*, Springer, 2005.
- [GER95] K. Gerlach and F. C. Lin, “Convergence Performance of Binary Adaptive Detectors,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 31, n°1, pp. 329–340, 1995.
- [GER97] K. Gerlach, M. Steiner and F. C. Lin, “Detection of a Spatially Distributed Target in White Noise,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 4, n°7, pp. 198–200, 1997.
- [GIN02] F. Gini and M. Greco, “Covariance Matrix Estimation for CFAR Detection in Correlated Heavy Tailed Clutter,” *Signal Processing*, Vol. 82, n°12, pp. 1847–1859, 2002.

- [GLA05] I. Gladkova and D. Chebanov, "Suppression of Grating Lobes in Stepped-Frequency Train," *Proceedings of the IEEE International Radar Conference*, pp. 371–376, 2005.
- [GLA09] I. Gladkova, "Analysis of Stepped-Frequency Pulse Train Design," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 45, n°4, pp. 1251–1261, 2009.
- [GOR02] S. A. Gorshkov, S. P. Leshchenko, V. M. Orlenko, S. Y. Sedyshev and U. D. Shirman, *Radar Target Backscattering Simulation: Software and User's Manual*, Artech House, 2002.
- [GRA07] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Elsevier, 2007.
- [HEM92] M. J. Hensch, *Tactical Missile Aerodynamics: General Topics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.
- [HUG83] P. K. Hughes, "A High-Resolution Radar Detection Strategy," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 19, n°5, pp. 663–667, 1983.
- [KAY07] S. Kay, "Optimal Signal Design for Detection of Gaussian Point Targets in Stationary Gaussian Clutter/Reverberation," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 1, n°1, pp. 31–41, 2007.
- [KEL86] E. J. Kelly, "An Adaptive Detection Algorithm," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 22, n°1, pp. 115–127, 1986.
- [KNO93] E. F. Knott, *Radar Cross Section Measurements*, Springer US, 1993.
- [LAC01] P. Lacomme, J.-P. Hardange, J.-C. Marchais and E. Normant, *Air and Spaceborne Radar Systems: An Introduction*, William Andrew, 2001.
- [LE 89] F. Le Chevalier, *Principes de Traitements de Signaux Radar et Sonar*, Masson, 1989.
- [LEV04] N. Levanon and E. Mozeson, *Radar Signals*, Wiley, 2004.
- [LEV05] N. Levanon, "Cross-Correlation of Long Binary Signals with Longer Mismatched Filters," *IEE Proceedings - Radar, Sonar, Navigation*, Vol. 152, n°6, pp. 377–382, 2005.
- [LEV07] N. Levanon, "Comment on 'Multi-Range-Resolution Radar Using Sideband Spectrum Energy'," *IET Radar, Sonar Navigation*, Vol. 1, n°3, p. 248, 2007.
- [LEV09] N. Levanon, "Mitigating Range Ambiguity in High PRF Radar using Inter-Pulse Binary Coding," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 45, n°2, pp. 687–697, 2009.
- [LI04] J. Li, K. Butler-Purpy, C. Benner and B. Russell, "Selecting a Fuzzy Aggregation Operator for Multicriteria Fault Location Problem," *Proceedings of the IEEE Power Systems Conference and Exposition*, Vol. 3, pp. 1476–1482, 2004.
- [LI06] J. Li, J. R. Guerci and L. Xu, "Signal Waveform's Optimal-Under-Restriction Design for Active Sensing," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 13, n°9, pp. 565–568, 2006.
- [LI96] Q. Li, E. J. Rothwell, K.-M. Chen and D. P. Nyquist, "Scattering Center Analysis of Radar Targets Using Fitting Scheme and Genetic Algorithms," *IEEE Transactions on Antenna and Propagation*, Vol. 44, n°2, pp. 198–207, 1996.

- [LOM01] P. Lombardo, M. Greco, F. Gini, A. Farina and J. B. Billingsley, "Impact of Clutter Spectra on Radar Performance Prediction," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 37, n°3, pp. 1022–1038, 2001.
- [LON12] T. Long, Y. Li and X. Yang, "Improved Double Threshold Detector for Spatially Distributed Target," *IEICE Transactions on Communication*, Vol. E95-B, n°4, pp. 1475–1478, 2012.
- [NAJ06] M. Najim, *Digital Filters Design for Signal and Image Processing*, Wiley, 2006.
- [NUN08] C. Nunn and G. Coxson, "Best-Known Autocorrelation Peak Sidelobe Levels for Binary Codes of Length 71 to 105," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 44, n°1, pp. 392–395, 2008.
- [OVA11] J.-P. Ovarlez, F. Pascal, P. Forster, G. Ginolhac and M. Mahot, "Traitements STAP et Modélisation SIRV : Robustesse et Persymétrie," *Traitement du Signal*, Vol. 28, n°1-2, pp. 113–142, 2011.
- [PAS05] F. Pascal, J.-P. Ovarlez, P. Forster and P. Larzabal, "Theoretical Analysis of an Improved Covariance Matrix Estimator in Non-Gaussian Noise," *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing*, Vol. 4, pp. 69–72, 2005.
- [PAS08] F. Pascal, P. Forster, J.-P. Ovarlez and P. Larzabal, "Performance Analysis of Covariance Matrix Estimates in Impulsive Noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, n°6, pp. 2206–2217, 2008.
- [PAT09] L. K. Patton. *On the Satisfaction of Modulus and Ambiguity Function Constraints in Radar Waveform Optimization for Detection*. PhD thesis, Wright State University, 2009. Director: B. Rigling.
- [PAT12] L. K. Patton, S. W. Frost and B. D. Rigling, "Efficient Design of Radar Waveforms for Optimised Detection in Coloured Noise," *IET Radar, Sonar, Navigation*, Vol. 6, n°1, pp. 21–29, 2012.
- [PER07] R. P. Perry, R. C. DiPietro and R. Fante, "Coherent Integration with Range Migration Using Keystone Formatting," *Proceedings of the IEEE Radar Conference*, pp. 863–868, 2007.
- [PET10] J. Petitjean. *Contributions au Traitement Spatio-Temporel Fondé sur un Modèle Autorégressif Vectoriel des Interférences pour Améliorer la Détection de Petites Cibles Lentes dans un Environnement de Fouillis Hétérogène Gaussien et Non Gaussien*. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, 2010. Directeur de thèse : E. Grivel.
- [RAB02] D. J. Rabideau, "Nonlinear Synthetic Wideband Waveforms," *Proceedings of the IEEE Radar Conference*, pp. 212–219, 2002.
- [RAB14] O. Rabaste and L. Savy, "Mismatched Filter Optimization via Quadratic Convex Programming for Radar Applications," *Proceedings of the International Radar Conference (Radar)*, pp. 1–6, 2014.
- [RIT11] M. A. Ritchie, A. Charlish, K. Woodbridge and A. G. Stove, "Use of the Kullback-Leibler Divergence in Estimating Clutter Distributions," *Proceedings of the IEEE Radar Conference*, pp. 751–756, 2011.

- [ROB92] F. C. Robey, D. R. Fuhrmann, E. J. Kelly and R. Nitzberg, "A CFAR Adaptive Matched Filter Detector," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 28, n°1, pp. 208–216, 1992.
- [ROU14] T. Rouffet, P. Vallet, E. Grivel, C. Enderli, B. Joseph and S. Kemkemian, "Design of a Multi-Resolution Phase-Coded Waveform in the Presence of a Colored Gaussian Clutter," *Proceedings of the International Radar Conference (Radar)*, pp. 1–6, 2014.
- [ROU15a] T. Rouffet, E. Grivel, P. Vallet, C. Enderli and S. Kemkemian, "Combining Two Phase Codes to Extend the Radar Unambiguous Range and Get a Trade-Off in Terms of Performance for Any Clutter," *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing*, 2015.
- [ROU15b] T. Rouffet, P. Vallet, E. Grivel, B. Joseph, C. Enderli and S. Kemkemian, "Analyse d'un GLRT pour la Détection de Cibles Etendues," *Actes de la Conférence GRETSI*, 2015.
- [SAY01] S. Sayama and M. Sekine, "Weibull, Log-Weibull and K-Distributed Ground Clutter Modeling Analyzed by AIC," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 37, n°3, pp. 1108–1113, 2001.
- [SHI06] M. Shinriki, H. Takase, R. Sato and H. Susaki, "Multi-Range-Resolution Radar Using Sideband Spectrum Energy," *IEE Proceedings - Radar, Sonar, Navigation*, Vol. 153, n°5, pp. 396–402, 2006.
- [SHI12] M. Shinriki and H. I. Takase, "Binary Codes for Multi-Range Resolution Radars," *Proceedings of the 13th International Radar Symposium*, pp. 359–354, 2012.
- [SHN91] D. Shnidman, "Calculation of Probability of Detection for Log-Normal Target Fluctuations," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 27, n°1, pp. 172–174, 1991.
- [SHN98] D. Shnidman, "Binary Integration for Swerling Target Fluctuations," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 34, n°3, pp. 1043–1054, 1998.
- [SKO08] M. I. Skolnik, *Radar Handbook, Third Edition*, McGraw Hill, 2008.
- [SKO81] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems, Third Edition*, McGraw Hill, 1981.
- [SWE54] P. Swerling, "Probability of Detection for Fluctuating Targets," Technical Report, Rand Memorandum RM-1217, Rand Corporation, 1954.
- [VAN71] G. A. Van Der Spek, "Detection of a Distributed Target," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 7, n°5, pp. 922–931, 1971.
- [WAL00] D. Walker, "Experimentally Motivated Model for Low Grazing Angle Radar Doppler Spectra of the Sea Surface," *IEE Proceedings - Radar, Sonar, Navigation*, Vol. 147, n°3, pp. 114–120, 2000.
- [WAR13] K. Ward, R. Tough and S. Watts, *Sea Clutter: Scattering, the K Distribution and Radar Performance*, Institution of Engineering and Technology, 2013.
- [WAT11] S. Watts, "A New Method for the Simulation of Coherent Sea Clutter," *Proceedings of the IEEE Radar Conference*, pp. 52–57, 2011.
- [WOO67] P. M. Woodward, "Radar Ambiguity Analysis," Technical Report, Technical note 731, Royal Radar Establishment, 1967.





# Abstract

In the field of airborne radar, one of the current industrial stakes, among others, is the identification of a target, whether airborne, terrestrial or maritime, through the establishment of its range profile. This implies to set up a transmit/receive processing for high resolution modes. In this context, the issues to be addressed include the design and the performance analysis of detectors for extended target models, the design of multi-resolution waveforms and the associated processing, the optimization of waveforms that are robust to clutter, etc. Within this frame, the work of this thesis is twofold.

The first part deals with the detection of a so-called « extended » target, i.e. which is characterized by a few main scatterers spread over several range gates not necessarily consecutive. This model is appropriate when the range resolution is thin enough and it is suited for target identification issues. In this context, we study a detection test based on the generalized likelihood test (GLRT) which includes the unknown locations of the scatterers, and when the disturbance is white Gaussian noise. By using ordered statistics, we deduce approximations of the probability of false alarm and the probability of detection. Numerical comparison with existing detectors are also provided.

Secondly, we study a waveform based on a pulse train which contains two phase codes: the first one is intrapulse whereas the second one is interpulse. Assuming a point target and Gaussian clutter, we propose to select these codes taking into account several criteria such as the maximization of the probability of detection or the minimization of the sidelobes of the received signal after processing. For a given type of clutter modeled by an autoregressive (AR) process, we address this multi-objective optimization problem using the Pareto fronts. Since the AR modeling makes it possible to consider several types of clutter from a reduced number of parameters, we study the robustness of optimal phase codes to clutter variations.

**Keywords :** Radar, High resolution detection, Waveform optimization.



# Résumé

Dans le domaine du radar aéroporté, les enjeux industriels actuels sont nombreux et portent, entre autres, sur l'établissement de profils distance de cibles aériennes, terrestres et maritimes pour leur identification. Cela implique en particulier la mise en œuvre de chaînes d'émission/réception pour des modes de fonctionnement haute résolution. Dans ce contexte, les problématiques à traiter comprennent alors la conception et l'analyse de performances de détecteurs pour des modèles de cibles étendues, la conception de formes d'ondes multi-résolutions et le développement des traitements associés, l'optimisation de formes d'onde robustes au fouillis, etc. Le travail de cette thèse, qui s'intègre dans ce cadre, se décompose en deux parties.

Dans un premier temps, nous traitons la détection d'une cible dite « étendue », c'est-à-dire caractérisée par plusieurs réflecteurs élémentaires prépondérants répartis sur plusieurs cases distance non nécessairement consécutives. Ce modèle est notamment approprié lorsque la résolution en distance est suffisamment fine, et s'intègre dans les problématiques d'identification de cible. Dans ce cadre, nous étudions un test de détection fondé sur le rapport de vraisemblances généralisé (GLRT) intégrant la localisation inconnue des réflecteurs, et lorsque la perturbation est du bruit blanc gaussien. En utilisant des résultats issus des statistiques d'ordre, nous déduisons des approximations de la probabilité de fausse alarme et de la probabilité de détection. Des comparaisons numériques avec des détecteurs existants sont fournies.

Dans un second temps, nous étudions une forme d'onde correspondant à un train d'impulsions contenant deux codes de phase, l'un intra impulsion et l'autre inter impulsion. Pour un modèle de cible ponctuelle et un fouillis gaussien, nous proposons de sélectionner ces codes en tenant compte de différents critères tels que la maximisation de la probabilité de détection ou encore la minimisation des lobes secondaires du signal reçu après traitement. Pour un type donné de fouillis modélisé par un processus autorégressif (AR), nous abordons le problème d'optimisation multi-objectifs en utilisant les fronts de Pareto. La modélisation AR permettant de considérer plusieurs types de fouillis à partir d'un nombre réduit de paramètres, nous étudions alors la robustesse des codes de phase optimaux à des variations de fouillis.

**Mots-clés :** Radar, Détection haute résolution, Optimisation de formes d'onde.

## **Publications :**

- T. Rouffet, P. Vallet, E. Grivel, C. Enderli, B. Joseph and S. Kemkemian, "Design of a Multi-Resolution Phase-Coded Waveform in the Presence of a Colored Gaussian Clutter", *Proceedings of the International Radar Conference (Radar)*, pp. 1-6, 2014.
- T. Rouffet, P. Vallet, E. Grivel, C. Enderli and S. Kemkemian, "Combining Two Phase Codes to Extend the Radar Unambiguous Range and Get a Trade-Off in Terms of Performance for Any Clutter", *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing*, 2015.
- T. Rouffet, P. Vallet, E. Grivel, C. Enderli, B. Joseph and S. Kemkemian, « Analyse d'un GLRT pour la Détection de Cibles Etendues », *Actes de la Conférence GRETSI*, 2015.